



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Algèbre et Mathématiques Discrètes

Thème

Commutant de certaines formes trilinéaires alternés

Présentée par :

M^r KADDOUR Abir et LACHACHE Houda

Devant le jury composé de :

ZEDAM Lemnaouar	Prof,	Université de M'sila	Président.
MIDOUNE Noureddine	MCA,	Université de M'sila	Encadreur.
MILLES Soheyb	MCA,	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

Nous tenons à remercier avant tout **Allah** le tout puissant, qui nous à donné la force et la patience d'accomplir notre travail dans les meilleurs condition.

Nous tenons à remercier particulièrement notre encadreur **Mr. MIDOUNE Noureddine**, pour ses précieux conseils et son aide durant toute la proide du travail.

Sans oublier, nous remercions Rakdi Mohamed Anouar pour ses suivis et ses consiels durant cette proide.

Nos remerciements s'adressent également aux membres de jury pour avoir accepté d'examiner notre mémoire.

Enfin, nos remerciements à la familles LACHACHE, KADDOUR, pour sacrifices q'elles ont fait pour que nous terminions nos étude.

Table des matières

Introduction	1
1 produit tensoriel et extérieure	3
1.1 Produit tensoriel	3
1.2 Produit extérieure	4
1.2.1 Support et Rang	4
1.2.2 Vecteur décomposable	5
1.2.3 Vecteur divisible	5
1.2.4 L'action d'un groupe sur un ensemble	5
1.2.5 Formes trilinéaire altérée	6
1.2.6 Suite exacte	7
1.2.7 Invariant et trivecteurs :L'invariant $C(\omega)$	7
2 Le commutant des trivecteurs :	8
2.1 Classification des trivecteurs	8
2.1.1 Classification des trivecteurs en dimension inférieure à 6	8
2.1.2 Classification des trivecteurs en dimension 6	9
2.1.3 Classification des trivecteurs en dimension 7	9
2.1.4 Classification des trivecteurs en dimension 8	9
2.2 Le commutant	10
2.2.1 Commutant des trivecteurs de rang 3	10
2.2.2 Commutant des trivecteurs de rang 5	12
2.2.3 Commutant des trivecteurs de rang 6	16
2.2.4 Le commutant des trivecteurs de rang 7	24
2.2.5 Commutant des trivecteurs de rang 8	30
Bibliographie	31

Introduction

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K .

La classification des trivecteurs (ou formes trilinéaires alternées), c'est-à-dire la détermination des orbites, et un représentant typique de chaque orbite, est l'étude de l'action du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel des trivecteurs $\wedge^3 E$ (ou des formes trilinéaires alternées $Alt_3(E)$).

De l'isomorphisme $\wedge^3 E^* \simeq (\wedge^3 E)^* \simeq Alt_3(E)$, on parle indifféremment des formes trilinéaires alternées et des trivecteurs .

Plusieurs auteurs ont étudié les formes trilinéaires alternées. Il n'y a qu'un nombre fini d'orbites pour $n \leq 8$ dont la liste est donnée dans [4], [5], [9],

[12] et [13].

Pour classifier les trivecteurs, on utilise le plus souvent les invariants algébriques des formes trilinéaires alternées

qui permettent de mieux comprendre la classification de ces formes, par exemple, le commutant $C(\omega)$ d'un trivecteur ω (ou forme trilinéaire alternée) qu'il a été introduit par B.Kahn [6].

Si $C(\omega_1)$ et $C(\omega_2)$ ne sont pas isomorphes, alors, leurs trivecteurs ω_1 et ω_2 ne le sont pas comme on le verra au chapitre II.

Dans ce mémoire, nous rappelons l'essentiel des résultats connus sur la classification des trivecteurs de rang $n \leq 8$,

puis nous déterminons les commutants de chaque trivecteur sur un corps algébriquement clos, pour $n \leq 8$.

Dans le premier chapitre, on donne des généralités sur le produit tensoriel, produit

extérieure, scindabilité , invariants , groupe d'automorphismes,
commutant et parties stables.

Le deuxième chapitre est consacré aux trivecteurs de rang au plus 7 et leur commutants.

Après avoir donné la classification des trivecteurs pour $n \leq 8$, nous déterminons les commutants de ces trivecteurs, on utilisant la définition.

Chapitre 1

produit tensoriel et extérieur

1.1 Produit tensoriel

Définition 1.1 Soit E espace vectoriel sur un corps commutatif K .

Il existe un espace vectoriel sur K , noté $E \otimes E$ qui se lit E tenseur E , et une forme bilinéaire

$$\begin{aligned}\varphi_1 : E \times E &\longrightarrow E \otimes E \\ (u, v) &\longrightarrow \varphi_1(u, v)\end{aligned}$$

tels que, pour toute forme bilinéaire

$$\begin{aligned}\varphi_2 : E \times E &\longrightarrow K \\ (u, v) &\longrightarrow \varphi_2(u, v)\end{aligned}$$

il existe une unique application linéaire $\varphi : E \otimes E \longrightarrow K$ telle que $\varphi_2 = \varphi \circ \varphi_1$

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \xrightarrow{\forall \varphi_2} & K \\ \exists \varphi_1 \downarrow & & \nearrow \\ E \otimes E & & \end{array}$$

L'ensemble des applications bilinéaires de $E \times E$ dans K , s'identifie à l'ensemble des applications linéaires de $E \otimes E$ dans K ,

$$\varphi(E, E; K) \simeq (E \otimes E; K)$$

et cette propriété caractérise $E \otimes E$.

On pose $T^3(E) = E \otimes E \otimes E = \otimes^3 E$.

1.2 Produit extérieure

Définition 1.2 On note $\wedge^3 E$ le quotient de $T^3(E)$ par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments $x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$ où $x_i = x_j$ pour 2 indices $i \neq j$.

On appelle $\wedge^3 E$ la puissance extérieure 3-ième de E (ou espace des trivecteurs).

On note $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ la classe dans ce quotient de l'élément $x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$. Cet élément se lit x_1 extérieur x_2 extérieur x_3 .

1. La puissance extérieure $\wedge^3 E$ est définissable d'une manière analogue au produit tensoriel.

On appelle forme 3-linéaire alternée sur E (ou forme trlinéaire alternée) à valeur dans K , une application 3-linéaire $E^3 \rightarrow K$, nulle chaque fois que deux vecteurs sont égaux.

Pour toute application 3-linéaire alternée $\omega_1 : E^3 \rightarrow K$, Il existe une unique application linéaire $\omega : \wedge^3 E \rightarrow K$ telle que

$$\begin{array}{ccc} E^3 & \xrightarrow{\forall \omega_1} & K \\ \exists \omega_2 \downarrow & \nearrow \exists \omega & \\ \wedge^3 E & & \end{array}$$

$$\omega_2 = \omega \circ \omega_1$$

2. $(x + y) \wedge (x + y) = 0 = x \wedge x + y \wedge y + x \wedge y + y \wedge x$ donc

$$x \wedge y = -y \wedge x$$

1.2.1 Support et Rang

Définition 1.3 Soit ω un trivecteur de $\wedge^3 E$.

On appelle support de ω et on note S_ω le plus petit sous-espace F de E tel que $\omega \in \wedge^3 F$, la dimension de S_ω s'appelle le rang de ω qu'on note $rg(\omega)$.

Le rang est invariant par l'action du groupe linéaire $GL(E)$.

Définition 1.4 (Radical) Soit $\omega \in \wedge^3 E^*$ une forme trilinéaire : le radical de ω , est l'ensemble :

$$Rad\omega = \{x \in E / \omega(x, y, z) = 0, \forall y, z \in E\}$$

Si $Rad\omega = \{0\}$, on dit que ω est non dégénérée ou de rang maximal.

1.2.2 Vecteur décomposable

Un 3-vecteur non nul ω est décomposable s'il existe x_1, x_2, x_3 dans E tel que $\omega = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$. Le support de ω est le sous-espace vectoriel engendré par x_1, x_2, x_3 , donc $S_\omega = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ dans ce cas $rg(\omega) = dim S_\omega = 3$.

Un trivecteur est somme de trivecteurs décomposable, et le nombre minimal de trivecteurs nécessaires est un invariant intéressant, c'est la longueur.

On écrit souvent $x_1 x_2 x_3$ au lieu de $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$.

1.2.3 Vecteur divisible

Définition 1.5 Soit ω un trivecteur non nul, ω est un trivecteur divisible s'il existe un $x \in E - \{0_E\}$ et $u \in \wedge^2 E_2$ tel que $E = Kx \oplus E_2$ et $\omega = x \wedge u$.

1.2.4 L'action d'un groupe sur un ensemble

L'action du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'ensemble des formes trilinéaires alternées $Alt_3(E)$, est définie par :

Pour $f \in GL(E)$ et $\omega : E \times E \times E \rightarrow K$ une forme trilinéaire alternée, on a $f.\omega(x, y, z) = \omega(f(x), f(y), f(z))$ satisfaisant aux conditions suivantes :

pour tous $f_1, f_2 \in GL(E)$, ω une forme trilinéaire alternée,

1. $(f_1 \circ f_2).\omega = f_1.(f_2.\omega)$

$$2. Id_E.\omega = \omega$$

L'action du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel $\wedge^3 E$, est définie par :

pour tous $f \in GL(E)$, $\omega \in \wedge^3 E$, $f.\omega = (\wedge^3 f)(\omega)$ où $\wedge^3 f$ est un endomorphisme de $\wedge^3 E$, définie par $\wedge^3 f(x \wedge y \wedge z) = f(x) \wedge f(y) \wedge f(z)$.

D'après l'isomorphisme $\wedge^3 E^* \simeq (\wedge^3 E)^*$, on emploie les deux définitions.

1.2.5 Formes trilinéaire alternée

L'espace vectoriel $\wedge^3 E$ peut être défini d'une autre manière en utilisant les formes alternées. Pour tout espace vectoriel E sur le corps commutatif K , l'ensemble $ALT_3(E)$ des formes trilinéaires alternées $h : E^3 \rightarrow K$ est lui-même un K -espace vectoriel pour les opérations terme à terme habituelles.

Définition 1.6 une forme trilinéaire

$$\begin{aligned} \omega & : E \times E \times E \longrightarrow K \\ (x, y, z) & \longrightarrow \omega(x, y, z) \end{aligned}$$

est dite alternée $\omega(x, y, z) = 0$ dès que $x_i = x_j$, pour une copie d'indice $i \neq j$.

pour chaque application linéaire

$$\begin{aligned} f & : E \longrightarrow E \\ \wedge^3 f & : \wedge^3 E \longrightarrow \wedge^3 E \\ x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 & \longrightarrow \wedge^3 f(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \\ & = f(x_1) \wedge f(x_2) \wedge f(x_3) \end{aligned}$$

1.2.6 Suite exacte

Soit $G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G''$ une suite d'homomorphismes de groupes . Nous dirons que cette suite est exacte si :

$$\text{Im } f = \ker g$$

Exemple 1.1

Si H est un sous groupe distingué de G , la suite

$$G \xrightarrow{j} H \xrightarrow{\varphi} G/H,$$

est exacte (j étant l'injection et φ la projection canonique) .

Dire que la suite $0 \longrightarrow G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G'' \longrightarrow 0$, est exacte, signifie que f est injectif, que $\text{Im } f = \ker g$ et que g est surjectif .

On obtient le produit semi-direct $G \simeq G' \rtimes G''$

1.2.7 Invariant et trivecteurs :L'invariant $C(\omega)$

Définition 1.7

Le commutant de ω a été introduit par B . Si $\omega \in \wedge^3 E^*$, on appelle commutant de ω , et on note $C(\omega)$ l'ensemble des endomorphismes $f : E \longrightarrow E$ tels que l'application :

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \omega(x_1, \dots, x_{i-1}, f x_i, x_{i+1}, \dots, x_3) \text{ ne dépende pas de } i :$$

$$\omega(f(x_1), x_2, x_3) = \omega(x_1, f(x_2), x_3) = \omega(x_1, x_2, f(x_3)).$$

On la note $\omega_f(x_1, x_2, x_3)$ et c'est clairement une forme trilinéaire alternée.

Chapitre 2

Le commutant des trivecteurs :

2.1 Classification des trivecteurs

Soit K un corps algébriquement clos, et E un K -espace vectoriel.

2.1.1 Classification des trivecteurs en dimension inférieure à 6

Pour $\dim E = 3$, il n'y a qu'une orbite de trivecteurs non nuls si $\omega \in \wedge^3 E - \{0\}$, il existe $\{e_1; e_2; e_3\}$ une base de E telle que $\omega = e_1 e_2 e_3$, alors $C(\omega) = K$.

Pour $\dim E = 4$, tous les trivecteurs non nuls sont décomposables, donc $\wedge^3 E$ a deux orbites, dans une base $(e_i), 1 \leq i \leq 4$, un représentant de chaque orbite est donné par

$$0 \\ e_1 e_2 e_3.$$

Pour $\dim E = 5$, l'isomorphisme $\wedge^3 E \simeq \wedge^2 E^*$ montre qu'il y a trois orbites dans $\wedge^3 E$, en effet si un trivecteur est non nul et non décomposable, il est nécessairement de rang maximal, donc divisible par un vecteur $e_i : \omega = e_i u$ où u est un bivecteur de rang 4, on peut choisir pour S_u , tout supplémentaire de Ke_1 dans E et il existe une base $(e_i), 1 \leq i \leq 5$, de E telle que un représentant de chaque orbite est donné par

$$0 \\ e_1 e_2 e_3$$

$$e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$$

2.1.2 Classification des trivecteurs en dimension 6

Soit E un espace vectoriel de $\dim E = 6$, et soit $\omega \in \wedge^3 E$ un trivecteur de rang maximal $r(\omega) = \dim E = 6$.

Il existe une base (e_i) , $1 \leq i \leq 6$, de E telle que ω s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{6.1} = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6 \\ \text{ou} \\ \omega_{6.2} = e_1e_2e_3 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6 \end{array} \right.$$

i.e. il existe 2 orbites de rang maximal.

2.1.3 Classification des trivecteurs en dimension 7

Il y'a cinq orbites de rang 7, et deux orbites de rang 6, une orbite de rang 5, une orbite de rang 3, et l'orbite 0 :

$$\omega_3 = e_1e_2e_3, \quad rg(\omega_3) = 3.$$

$$\omega_5 = e_1(e_2e_3 + e_4e_5), \quad rg(\omega_5) = 5.$$

$$\omega_{6.1} = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6.$$

$$\omega_{6.2} = e_1e_2e_4 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6, \quad rg(\omega_{6.1}) = rg(\omega_{6.2}) = 6.$$

$$\omega_{7.1} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7).$$

$$\omega_{7.2} = \omega_{7.1} + e_2e_4e_6.$$

$$\omega_{7.3} = e_1e_2e_3 + e_3e_4e_5 + e_5e_6e_7.$$

$$\omega_{7.4} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_7.$$

$$\omega_{7.5} = \omega_{7.2} + e_3e_5e_7.$$

$$rg(\omega_{7.i}) = 7, \quad i = 1, 5$$

2.1.4 Classification des trivecteurs en dimension 8

Il existe 13 classes d'équivalence de trivecteurs de rang 8. Dans une base $(e_i)_{i=1,8}$ de E , un représentant de chaque classe est donné par $\omega_{8,i}$, $1 \leq i \leq 13$, de la table 1 :

Table 1

$\omega_{8,i}$	Expression d'un représentant de l'orbite
$\omega_{8,1}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6e_7e_8$
$\omega_{8,2}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_5e_6e_8$
$\omega_{8,3}$	$e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_5 + e_7e_8)$
$\omega_{8,4}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_7 + e_4e_8)$
$\omega_{8,5}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_3 + e_7e_8)$
$\omega_{8,6}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_8(e_4e_3 + e_5e_6)$
$\omega_{8,7}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_6 + e_5e_7) + e_2(e_5e_6 + e_7e_8)$
$\omega_{8,8}$	$e_1(e_2e_8 + e_3e_6 + e_4e_7) + e_6e_7e_8 + e_3e_4e_5$
$\omega_{8,9}$	$e_1[e_2(e_3 + e_4) + e_5e_6] + e_3e_5e_7 + e_4e_6e_8$
$\omega_{8,10}$	$e_1(e_2e_8 + e_6e_7) + e_2e_3e_5 + e_3e_4e_6 + e_4e_5e_7$
$\omega_{8,11}$	$e_1(e_3e_7 + e_5e_4 + e_8e_2) + e_8(e_4e_3 + e_6e_7) + e_2e_4e_6$
$\omega_{8,12}$	$e_1[(e_4 - e_7)(e_3 - e_8) + e_5e_7] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$
$\omega_{8,13}$	$e_1[e_5(e_3 - e_7) + e_8e_4] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$

2.2 Le commutant

2.2.1 Commutant des trivecteurs de rang 3

On a $\omega_3 = e_1e_2e_3$ donc si

$f \in C(\omega)$, alors $\omega(f(e_1), e_2, e_3) = \omega(e_1, f(e_2), e_3) = \omega(e_1, e_2, f(e_3))$

$$M_B(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

* $\omega(f(e_1), e_2, e_3) = \omega(e_1, f(e_2), e_3) = \omega(e_1, e_2, f(e_3))$.

$\omega(\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3, e_2, e_3) = \omega(e_1, \beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3, e_3) = \omega(e_1, e_2, \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3)$.

$$\alpha_1\omega(e_1, e_2, e_3) = \beta_2\omega(e_1, e_2, e_3) = \gamma_3\omega(e_1, e_2, e_3).$$

Comme $\omega(e_1, e_2, e_3) = 1$, donc, $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \alpha$.

$$*\omega(f(e_1), e_1, e_3) = \omega(e_1, f(e_1), e_3) = \omega(e_1, e_1, f(e_3)).$$

$$\omega(\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3, e_1, e_3) = \omega(e_1, \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3, e_3) = \omega(e_1, e_1, \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3).$$

$$\alpha_2\omega(e_2, e_1, e_3) = \alpha_2\omega(e_1, e_2, e_3) = 0.$$

$$-\alpha_2 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0.$$

$$*\omega(f(e_1), e_1, e_2) = \omega(e_1, f(e_1), e_2) = \omega(e_1, e_1, f(e_2)).$$

$$\omega(\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3, e_1, e_2) = \omega(e_1, \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3, e_2) = \omega(e_1, e_1, \beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3).$$

$$\alpha_3\omega(e_3, e_1, e_2) = \alpha_3\omega(e_1, e_3, e_2) = 0.$$

$$-\alpha_3 = -\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$*\omega(f(e_1), e_2, e_2) = \omega(e_1, f(e_2), e_2) = \omega(e_1, e_2, f(e_2)).$$

$$\omega(\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3, e_2, e_2) = \omega(e_1, \beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3, e_2) = \omega(e_1, e_2, \beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3).$$

$$0 = \beta_3\omega(e_1, e_3, e_2) = \beta_3\omega(e_1, e_2, e_3).$$

$$-\beta_3 = \beta_3 = 0 \Rightarrow \beta_3 = 0$$

$$*\omega(f(e_1), e_3, e_3) = \omega(e_1, f(e_3), e_3) = \omega(e_1, e_3, f(e_3)).$$

$$\omega(\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3, e_3, e_3) = \omega(e_1, \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3, e_3) = \omega(e_1, e_3, \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3).$$

$$\gamma_2\omega(e_1, e_2, e_3) = \gamma_2\omega(e_1, e_3, e_2).$$

$$-\gamma_2 = -\gamma_2 = 0 \Rightarrow \gamma_2 = 0.$$

$$*\omega(f(e_2), e_2, e_3) = \omega(e_2, f(e_2), e_3) = \omega(e_2, e_2, f(e_3)).$$

$$\omega(\beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3, e_2, e_3) = \omega(e_2, \beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3, e_3) = 0.$$

$$\beta_1\omega(e_1, e_2, e_3) = \beta_1\omega(e_2, e_1, e_3) = 0.$$

$$\beta_1 = -\beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = 0.$$

$$*\omega(f(e_3), e_2, e_3) = \omega(e_3, f(e_2), e_3) = \omega(e_3, e_2, f(e_3)).$$

$$\omega(\gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3, e_2, e_3) = \omega(e_3, \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3, e_3) = \omega(e_3, e_2, \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3).$$

$$\gamma_1\omega(e_1, e_2, e_3) = 0 = \gamma_1\omega(e_3, e_2, e_1).$$

$$\gamma_1 = -\gamma_1 = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 0.$$

Donc la matrice de f est de la forme :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_3.$$

C'est-à-dire

$$C(\omega_3) \simeq K$$

2.2.2 Commutant des trivecteurs de rang 5

On a :

$$\omega = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_5.$$

$$\text{La forme trilinéaire alterné : } \begin{cases} \omega(e_1, e_2, e_3) = 1 \\ \omega(e_1, e_4, e_5) = 1 \\ \omega(e_i, e_j, e_k) = 0 \end{cases}$$

Si $f \in C(\omega_5)$, alors :

$$\begin{aligned} \omega(f(e_1), e_2, e_3) &= \omega(e_1, f(e_2), e_3) = \omega(e_1, e_2, f(e_3)) \\ \omega(f(e_1), e_4, e_5) &= \omega(e_1, f(e_4), e_5) = \omega(e_1, e_4, f(e_5)) \end{aligned}$$

La matrice associée à f est de la forme :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) & f(e_5) \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \sigma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \sigma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \sigma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 & \sigma_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \delta_5 & \sigma_5 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{matrix}$$

On calcule donc

$$* \omega(f(e_1), e_2, e_3) = \omega(e_1, f(e_2), e_3) = \omega(e_1, e_2, f(e_3)).$$

$$\omega(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5, e_2, e_3) = \omega(e_1, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5, e_3) = \omega(e_1, e_2, \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4 + \gamma_5 e_5).$$

$$\alpha_1 \omega(e_1, e_2, e_3) + \alpha_2 \omega(e_1, e_2, e_3) + \alpha_3 \omega(e_1, e_2, e_3) + \alpha_4 \omega(e_1, e_2, e_3) + \alpha_5 \omega(e_1, e_2, e_3) = \beta_2 \omega(e_1, e_2, e_3) = \gamma_3 \omega(e_1, e_2, e_3).$$

Comme $\omega(e_1, e_2, e_3) = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \alpha$.

$$* \omega(f(e_1), e_4, e_5) = \omega(e_1, f(e_4), e_5) = \omega(e_1, e_4, f(e_5)).$$

$$\omega(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5, e_4, e_5) = \omega(e_1, \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 + \delta_4 e_4 + \delta_5 e_5, e_5) = \omega(e_1, e_4, \sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3 + \sigma_4 e_4 + \sigma_5 e_5).$$

$$\alpha_1 \omega(e_1, e_4, e_5) = \delta_4 \omega(e_1, e_4, e_5) = \sigma_5 \omega(e_1, e_4, e_5).$$

Comme $\omega(e_1, e_2, e_3) = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \delta_4 = \sigma_5$.

Donc, $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \delta_4 = \sigma_5 = \lambda$.

$$* \omega(f(e_1), e_1, e_2) = \omega(e_1, f(e_1), e_2) = \omega(e_1, e_1, f(e_2)).$$

$$\omega(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5, e_1, e_2) = \alpha_3 \omega(e_3, e_1, e_2) = \alpha_3 \omega(e_1, e_3, e_2) = 0.$$

$$-\alpha_3 = 0 \text{ donc, } \alpha_3 = 0.$$

$$* \omega(f(e_1), e_1, e_3) = \omega(e_1, f(e_1), e_3) = \omega(e_1, e_1, f(e_3)).$$

$$\omega(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5, e_1, e_3) = \alpha_2 \omega(e_2, e_1, e_3) = \alpha_2 \omega(e_1, e_2, e_3) = 0.$$

$$-\alpha_2 = \alpha_2 = 0. \text{ donc, } \alpha_2 = 0.$$

$$* \omega(f(e_1), e_1, e_4) = \omega(e_1, f(e_1), e_4) = \omega(e_1, e_1, f(e_4)).$$

$$\omega(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5, e_1, e_4) = \alpha_5 \omega(e_5, e_1, e_4) = \alpha_5 \omega(e_1, e_5, e_4) = 0$$

donc, $\alpha_5 = 0$.

$$* \omega(f(e_1), e_1, e_5) = \omega(e_1, f(e_1), e_5) = \omega(e_1, e_1, f(e_5)).$$

$$\omega(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5, e_1, e_5) = \alpha_4 \omega(e_4, e_1, e_5) = \alpha_4 \omega(e_1, e_4, e_5) = 0$$

donc, $\alpha_4 = 0$.

$$* \omega(f(e_2), e_2, e_1) = \omega(e_2, f(e_2), e_1) = \omega(e_2, e_2, f(e_1)).$$

$$\omega(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5, e_2, e_1) = \beta_3 \omega(e_3, e_2, e_1) = \beta_3 \omega(e_2, e_3, e_1) = 0$$

donc, $\beta_3 = 0$.

$$* \omega(f(e_2), e_2, e_3) = \omega(e_2, f(e_2), e_3) = \omega(e_2, e_2, f(e_3)).$$

$$\omega(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5, e_2, e_3) = \beta_1 \omega(e_1, e_2, e_3) = \beta_1 \omega(e_2, e_1, e_3) = 0$$

donc, $\beta_1 = 0$.

$$* \omega(f(e_2), e_2, e_4) = \omega(e_2, f(e_2), e_4) = \omega(e_2, e_2, f(e_4)).$$

$$\omega(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5, e_2, e_4) = \beta_1 \omega(e_1, e_2, e_4) + \beta_2 \omega(e_2, e_2, e_4) + \beta_3 \omega(e_3, e_2, e_4) + \beta_4 \omega(e_4, e_2, e_4) + \beta_5 \omega(e_5, e_2, e_4) = 0$$

$$* \omega(f(e_2), e_2, e_5) = \omega(e_2, f(e_2), e_5) = \omega(e_2, e_2, f(e_5)).$$

$$\omega(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5, e_2, e_5) = \beta_1 \omega(e_1, e_2, e_5) + \beta_2 \omega(e_2, e_2, e_5) + \beta_3 \omega(e_3, e_2, e_5) + \beta_4 \omega(e_4, e_2, e_5) + \beta_5 \omega(e_5, e_2, e_5) = 0$$

$$* \omega(f(e_3), e_3, e_1) = \omega(e_3, f(e_3), e_1) = \omega(e_3, e_3, f(e_1)).$$

$$\omega(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4 + \gamma_5 e_5, e_3, e_1) = \gamma_2 \omega(e_2, e_3, e_1) = \gamma_2 \omega(e_3, e_2, e_1) = 0$$

donc, $\gamma_2 = 0$.

$$* \omega(f(e_3), e_3, e_2) = \omega(e_3, f(e_3), e_2) = \omega(e_3, e_3, f(e_2)).$$

$$\omega(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4 + \gamma_5 e_5, e_3, e_2) = \gamma_1 \omega(e_1, e_3, e_2) = \gamma_1 \omega(e_3, e_1, e_2) = 0$$

donc, $\gamma_1 = 0$.

$$* \omega(f(e_3), e_3, e_4) = \omega(e_3, f(e_3), e_4) = \omega(e_3, e_3, f(e_4)).$$

$$\omega(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4 + \gamma_5 e_5, e_3, e_4) = \gamma_1 \omega(e_1, e_3, e_4) + \gamma_2 \omega(e_2, e_3, e_4) + \gamma_3 \omega(e_3, e_3, e_4) + \gamma_4 \omega(e_4, e_3, e_4) + \gamma_5 \omega(e_5, e_3, e_4) = 0.$$

$$* \omega(f(e_3), e_3, e_5) = \omega(e_3, f(e_3), e_5) = \omega(e_3, e_3, f(e_5)).$$

$$\omega(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4 + \gamma_5 e_5, e_3, e_5) = \gamma_1 \omega(e_1, e_3, e_5) + \gamma_2 \omega(e_2, e_3, e_5) + \gamma_3 \omega(e_3, e_3, e_5) + \gamma_4 \omega(e_4, e_3, e_5) + \gamma_5 \omega(e_5, e_3, e_5) = 0.$$

$$* \omega(f(e_4), e_4, e_1) = \omega(e_4, f(e_4), e_1) = \omega(e_4, e_4, f(e_1)).$$

$$\omega(\delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 + \delta_4 e_4 + \delta_5 e_5, e_4, e_1) = \delta_5 \omega(e_5, e_4, e_1) = \delta_5 \omega(e_4, e_5, e_1) = 0$$

donc, $\delta_5 = 0$.

$$* \omega(f(e_4), e_4, e_2) = \omega(e_4, f(e_4), e_2) = \omega(e_4, e_4, f(e_2)).$$

$$\omega(\delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 + \delta_4 e_4 + \delta_5 e_5, e_4, e_2) = \delta_1 \omega(e_1, e_4, e_2) + \delta_2 \omega(e_2, e_4, e_2) + \delta_3 \omega(e_3, e_4, e_2) + \delta_4 \omega(e_4, e_4, e_2) + \delta_5 \omega(e_5, e_4, e_2) = 0.$$

$$* \omega(f(e_4), e_4, e_3) = \omega(e_4, f(e_4), e_3) = \omega(e_4, e_4, f(e_3)).$$

$$\omega(\delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 + \delta_4 e_4 + \delta_5 e_5, e_4, e_3) = \delta_1 \omega(e_1, e_4, e_3) + \delta_2 \omega(e_2, e_4, e_3) + \delta_3 \omega(e_3, e_4, e_3) + \delta_4 \omega(e_4, e_4, e_3) + \delta_5 \omega(e_5, e_4, e_3) = 0.$$

$$* \omega(f(e_4), e_4, e_5) = \omega(e_4, f(e_4), e_5) = \omega(e_4, e_4, f(e_5)).$$

$$\omega(\delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 + \delta_4 e_4 + \delta_5 e_5, e_4, e_5) = \delta_1 \omega(e_5, e_4, e_5) = \delta_5 \omega(e_4, e_1, e_5) = 0$$

donc, $\delta_1 = 0$.

$$* \omega(f(e_5), e_5, e_1) = \omega(e_5, f(e_5), e_1) = \omega(e_5, e_5, f(e_1)).$$

$$\omega(\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3 + \sigma_4 e_4 + \sigma_5 e_5, e_5, e_1) = \sigma_4 \omega(e_4, e_5, e_1) = \sigma_4 \omega(e_5, e_4, e_1) = 0$$

donc, $\sigma_4 = 0$.

$$* \omega(f(e_5), e_5, e_2) = \omega(e_5, f(e_5), e_2) = \omega(e_5, e_5, f(e_2)).$$

$$\omega(\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3 + \sigma_4 e_4 + \sigma_5 e_5, e_5, e_2) = \sigma_1 \omega(e_1, e_5, e_2) + \sigma_2 \omega(e_2, e_5, e_2) + \sigma_3 \omega(e_3, e_5, e_2) + \sigma_4 \omega(e_4, e_5, e_2) + \sigma_5 \omega(e_5, e_5, e_2) = 0.$$

$$* \omega(f(e_5), e_5, e_3) = \omega(e_5, f(e_5), e_3) = \omega(e_5, e_5, f(e_3)).$$

$$\omega(\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3 + \sigma_4 e_4 + \sigma_5 e_5, e_5, e_3) = \sigma_1 \omega(e_1, e_5, e_3) + \sigma_2 \omega(e_2, e_5, e_3) + \sigma_3 \omega(e_3, e_5, e_3) + \sigma_4 \omega(e_4, e_5, e_3) + \sigma_5 \omega(e_5, e_5, e_3) = 0.$$

$$* \omega(f(e_5), e_5, e_4) = \omega(e_5, f(e_5), e_4) = \omega(e_5, e_5, f(e_4)).$$

$$\omega(\sigma_1 e_1 + \sigma_2 e_2 + \sigma_3 e_3 + \sigma_4 e_4 + \sigma_5 e_5, e_5, e_4) = \sigma_1 \omega(e_1, e_5, e_4) = \sigma_1 \omega(e_5, e_1, e_4) = 0$$

donc, $\sigma_1 = 0$

D'où, la matrice est de la forme :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_5.$$

Ce qui prouve que

$$C(\omega_5) = K$$

2.2.3 Commutant des trivecteurs de rang 6

Proposition 2.1 *Pour ω un trivecteur de rang 6, on a le tableau suivant :*

	Nome	Trivecteur	$C(\omega)$
Tableau 1.	$\omega_{6,1}$	$e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6$	$K \times K$
	$\omega_{6,2}$	$e_1e_2e_4 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6$	$K[\epsilon], \epsilon^2 = 0$

Preuve. Soit $f \in C(\omega_{6,1})$, alors, $f : E \rightarrow E$ et,

$$\begin{aligned}\omega(f(e_1), e_2, e_3) &= \omega(e_1, f(e_2), e_3) = \omega(e_1, e_2, f(e_3)) \\ \omega(f(e_4), e_5, e_6) &= \omega(e_4, f(e_5), e_6) = \omega(e_4, e_5, f(e_6))\end{aligned}$$

La matrice associée à f ,

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) & f(e_5) & f(e_6) \\ \lambda_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & \mu_1 & \delta_1 \\ \lambda_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \mu_2 & \delta_2 \\ \lambda_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \alpha_3 & \mu_3 & \delta_3 \\ \lambda_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \alpha_4 & \mu_4 & \delta_4 \\ \lambda_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \alpha_5 & \mu_5 & \delta_5 \\ \lambda_6 & \beta_6 & \gamma_6 & \alpha_6 & \mu_6 & \delta_6 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{matrix}$$

On a :

$$\begin{aligned}*\omega(f(e_1), e_2, e_3) &= \omega(e_1, f(e_2), e_3) = \omega(e_1, e_2, f(e_3)). \\ f(e_1) &= \lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \lambda_3e_3 + \lambda_4e_4 + \lambda_5e_5 + \lambda_6e_6. \\ f(e_2) &= \beta_1e_1 + \beta_2e_2 + \beta_3e_3 + \beta_4e_4 + \beta_5e_5 + \beta_6e_6. \\ f(e_3) &= \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3 + \gamma_4e_4 + \gamma_5e_5 + \gamma_6e_6. \\ \omega(f(e_1), e_2, e_3) &= \omega(\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \lambda_3e_3 + \lambda_4e_4 + \lambda_5e_5 + \lambda_6e_6, e_2, e_3) = \lambda_1\omega(e_1, e_2, e_3) + \\ &\lambda_2\omega(e_2, e_2, e_3) + \lambda_3\omega(e_3, e_2, e_3) + \lambda_4\omega(e_4, e_2, e_3) + \lambda_5\omega(e_5, e_2, e_3) + \lambda_6\omega(e_6, e_2, e_3) = \\ &\lambda_1 = \beta_2 = \gamma_3. \\ *\omega(f(e_4), e_5, e_6) &= \omega(e_4, f(e_5), e_6) = \omega(e_4, e_5, f(e_6)). \\ f(e_4) &= \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3 + \alpha_4e_4 + \alpha_5e_5 + \alpha_6e_6. \\ f(e_5) &= \mu_1e_1 + \mu_2e_2 + \mu_3e_3 + \mu_4e_4 + \mu_5e_5 + \mu_6e_6. \\ f(e_6) &= \delta_1e_1 + \delta_2e_2 + \delta_3e_3 + \delta_4e_4 + \delta_5e_5 + \delta_6e_6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega(f(e_4), e_5, e_6) &= \omega(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6, e_5, e_6) = \alpha_1 \omega(e_1, e_5, e_6) + \\ &\alpha_2 \omega(e_2, e_5, e_6) + \alpha_3 \omega(e_3, e_5, e_6) + \alpha_4 \omega(e_4, e_5, e_6) + \alpha_5 \omega(e_5, e_5, e_6) + \alpha_6 \omega(e_6, e_5, e_6) = \\ &\alpha_4 = \mu_5 = \delta_6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}*\omega(f(e_1), e_1, e_2) &= \omega(e_1, f(e_1), e_2) = \omega(e_1, e_1, f(e_2)). \\ \omega(f(e_1), e_1, e_2) &= \lambda_1 \omega(e_1, e_1, e_2) + \lambda_2 \omega(e_2, e_1, e_2) + \lambda_3 \omega(e_3, e_1, e_2) + \lambda_4 \omega(e_4, e_1, e_2) + \\ &\lambda_5 \omega(e_5, e_1, e_2) + \lambda_6 \omega(e_6, e_1, e_2) = \lambda_3 = -\lambda_3 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}*\omega(f(e_1), e_1, e_3) &= \omega(e_1, f(e_1), e_3) = \omega(e_1, e_1, f(e_3)). \\ \omega(f(e_1), e_1, e_3) &= \lambda_1 \omega(e_1, e_1, e_3) + \lambda_2 \omega(e_2, e_1, e_3) + \lambda_3 \omega(e_3, e_1, e_3) + \lambda_4 \omega(e_4, e_1, e_3) + \\ &\lambda_5 \omega(e_5, e_1, e_3) + \lambda_6 \omega(e_6, e_1, e_3) = -\lambda_2 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}*\omega(f(e_1), e_1, e_4) &= \omega(e_1, f(e_1), e_4) = \omega(e_1, e_1, f(e_4)). \\ \omega(f(e_1), e_1, e_4) &= \lambda_1 \omega(e_1, e_1, e_4) + \lambda_2 \omega(e_2, e_1, e_4) + \lambda_3 \omega(e_3, e_1, e_4) + \lambda_4 \omega(e_4, e_1, e_4) + \\ &\lambda_5 \omega(e_5, e_1, e_4) + \lambda_6 \omega(e_6, e_1, e_4) = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}*\omega(f(e_1), e_1, e_5) &= \omega(e_1, f(e_1), e_5) = \omega(e_1, e_1, f(e_5)). \\ \omega(f(e_1), e_1, e_5) &= \lambda_1 \omega(e_1, e_1, e_5) + \lambda_2 \omega(e_2, e_1, e_5) + \lambda_3 \omega(e_3, e_1, e_5) + \lambda_4 \omega(e_4, e_1, e_5) + \\ &\lambda_5 \omega(e_5, e_1, e_5) + \lambda_6 \omega(e_6, e_1, e_5) = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}*\omega(f(e_1), e_1, e_6) &= \omega(e_1, f(e_1), e_6) = \omega(e_1, e_1, f(e_6)). \\ \omega(f(e_1), e_1, e_6) &= \lambda_1 \omega(e_1, e_1, e_6) + \lambda_2 \omega(e_2, e_1, e_6) + \lambda_3 \omega(e_3, e_1, e_6) + \lambda_4 \omega(e_4, e_1, e_6) + \\ &\lambda_5 \omega(e_5, e_1, e_6) + \lambda_6 \omega(e_6, e_1, e_6) = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}*\omega(f(e_2), e_2, e_1) &= \omega(e_2, f(e_2), e_1) = \omega(e_2, e_2, f(e_1)) \\ \omega(f(e_2), e_2, e_1) &= \beta_1 \omega(e_1, e_2, e_1) + \beta_2 \omega(e_2, e_2, e_1) + \beta_3 \omega(e_3, e_2, e_1) + \beta_4 \omega(e_4, e_2, e_1) + \\ &\beta_5 \omega(e_5, e_2, e_1) + \beta_6 \omega(e_6, e_2, e_1) = -\beta_3 = -\beta_3 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}*\omega(f(e_2), e_2, e_3) &= \omega(e_2, f(e_2), e_3) = \omega(e_2, e_2, f(e_3)) \\ \omega(f(e_2), e_2, e_3) &= \beta_1 \omega(e_1, e_2, e_3) + \beta_2 \omega(e_2, e_2, e_3) + \beta_3 \omega(e_3, e_2, e_3) + \beta_4 \omega(e_4, e_2, e_3) + \\ &\beta_5 \omega(e_5, e_2, e_3) + \beta_6 \omega(e_6, e_2, e_3) = \beta_1 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}*\omega(f(e_2), e_2, e_4) &= \omega(e_2, f(e_2), e_4) = \omega(e_2, e_2, f(e_4)) \\ \omega(f(e_2), e_2, e_4) &= \beta_1 \omega(e_1, e_2, e_4) + \beta_2 \omega(e_2, e_2, e_4) + \beta_3 \omega(e_3, e_2, e_4) + \beta_4 \omega(e_4, e_2, e_4) + \\ &\beta_5 \omega(e_5, e_2, e_4) + \beta_6 \omega(e_6, e_2, e_4) = 0.\end{aligned}$$

$$*\omega(f(e_2), e_2, e_5) = \omega(e_2, f(e_2), e_5) = \omega(e_2, e_2, f(e_5))$$

$$\omega(f(e_2), e_2, e_5) = \beta_1\omega(e_1, e_2, e_5) + \beta_2\omega(e_2, e_2, e_5) + \beta_3\omega(e_3, e_2, e_5) + \beta_4\omega(e_4, e_2, e_5) + \beta_5\omega(e_5, e_2, e_5) + \beta_6\omega(e_6, e_2, e_5) = 0.$$

$$*\omega(f(e_2), e_2, e_6) = \omega(e_2, f(e_2), e_6) = \omega(e_2, e_2, f(e_6))$$

$$\omega(f(e_2), e_2, e_6) = \beta_1\omega(e_1, e_2, e_6) + \beta_2\omega(e_2, e_2, e_6) + \beta_3\omega(e_3, e_2, e_6) + \beta_4\omega(e_4, e_2, e_6) + \beta_5\omega(e_5, e_2, e_6) + \beta_6\omega(e_6, e_2, e_6) = 0.$$

$$*\omega(f(e_3), e_3, e_1) = \omega(e_3, f(e_3), e_1) = \omega(e_3, e_3, f(e_1))$$

$$\omega(f(e_3), e_3, e_1) = \gamma_1\omega(e_1, e_3, e_1) + \gamma_2\omega(e_2, e_3, e_1) + \gamma_3\omega(e_3, e_3, e_1) + \gamma_4\omega(e_4, e_3, e_1) + \gamma_5\omega(e_5, e_3, e_1) + \gamma_6\omega(e_6, e_3, e_1) = \gamma_2 = -\gamma_2 = 0.$$

$$*\omega(f(e_3), e_3, e_2) = \omega(e_3, f(e_3), e_2) = \omega(e_3, e_3, f(e_2))$$

$$\omega(f(e_3), e_3, e_2) = \gamma_1\omega(e_1, e_3, e_2) + \gamma_2\omega(e_2, e_3, e_2) + \gamma_3\omega(e_3, e_3, e_2) + \gamma_4\omega(e_4, e_3, e_2) + \gamma_5\omega(e_5, e_3, e_2) + \gamma_6\omega(e_6, e_3, e_2) = \gamma_1 = 0.$$

$$*\omega(f(e_3), e_3, e_4) = \omega(e_3, f(e_3), e_4) = \omega(e_3, e_3, f(e_4))$$

$$\omega(f(e_3), e_3, e_4) = \gamma_1\omega(e_1, e_3, e_4) + \gamma_2\omega(e_2, e_3, e_4) + \gamma_3\omega(e_3, e_3, e_4) + \gamma_4\omega(e_4, e_3, e_4) + \gamma_5\omega(e_5, e_3, e_4) + \gamma_6\omega(e_6, e_3, e_4) = 0.$$

$$*\omega(f(e_3), e_3, e_5) = \omega(e_3, f(e_3), e_5) = \omega(e_3, e_3, f(e_5))$$

$$\omega(f(e_3), e_3, e_5) = \gamma_1\omega(e_1, e_3, e_5) + \gamma_2\omega(e_2, e_3, e_5) + \gamma_3\omega(e_3, e_3, e_5) + \gamma_4\omega(e_4, e_3, e_5) + \gamma_5\omega(e_5, e_3, e_5) + \gamma_6\omega(e_6, e_3, e_5) = 0.$$

$$*\omega(f(e_3), e_3, e_6) = \omega(e_3, f(e_3), e_6) = \omega(e_3, e_3, f(e_6))$$

$$\omega(f(e_3), e_3, e_6) = \gamma_1\omega(e_1, e_3, e_6) + \gamma_2\omega(e_2, e_3, e_6) + \gamma_3\omega(e_3, e_3, e_6) + \gamma_4\omega(e_4, e_3, e_6) + \gamma_5\omega(e_5, e_3, e_6) + \gamma_6\omega(e_6, e_3, e_6) = 0.$$

$$*\omega(f(e_4), e_4, e_1) = \omega(e_4, f(e_4), e_1) = \omega(e_4, e_4, f(e_1))$$

$$\omega(f(e_4), e_4, e_1) = \alpha_1\omega(e_1, e_4, e_1) + \alpha_2\omega(e_2, e_4, e_1) + \alpha_3\omega(e_3, e_4, e_1) + \alpha_4\omega(e_4, e_4, e_1) + \alpha_5\omega(e_5, e_4, e_1) + \alpha_6\omega(e_6, e_4, e_1) = 0.$$

$$*\omega(f(e_4), e_4, e_2) = \omega(e_4, f(e_4), e_2) = \omega(e_4, e_4, f(e_2))$$

$$\omega(f(e_4), e_4, e_2) = \alpha_1\omega(e_1, e_4, e_2) + \alpha_2\omega(e_2, e_4, e_2) + \alpha_3\omega(e_3, e_4, e_2) + \alpha_4\omega(e_4, e_4, e_2) + \alpha_5\omega(e_5, e_4, e_2) + \alpha_6\omega(e_6, e_4, e_2) = 0.$$

$$*\omega(f(e_4), e_4, e_3) = \omega(e_4, f(e_4), e_3) = \omega(e_4, e_4, f(e_3))$$

$$\omega(f(e_4), e_4, e_3) = \alpha_1\omega(e_1, e_4, e_3) + \alpha_2\omega(e_2, e_4, e_3) + \alpha_3\omega(e_3, e_4, e_3) + \alpha_4\omega(e_4, e_4, e_3) + \alpha_5\omega(e_5, e_4, e_3) + \alpha_6\omega(e_6, e_4, e_3) = 0.$$

$$\begin{aligned}
& * \omega(f(e_4), e_4, e_5) = \omega(e_4, f(e_4), e_5) = \omega(e_4, e_4, f(e_5)) \\
& \omega(f(e_4), e_4, e_5) = \alpha_1 \omega(e_1, e_4, e_5) + \alpha_2 \omega(e_2, e_4, e_5) + \alpha_3 \omega(e_3, e_4, e_5) + \alpha_4 \omega(e_4, e_4, e_5) + \\
& \alpha_5 \omega(e_5, e_4, e_5) + \alpha_6 \omega(e_6, e_4, e_5) = \alpha_6 = -\alpha_6 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * \omega(f(e_4), e_4, e_6) = \omega(e_4, f(e_4), e_6) = \omega(e_4, e_4, f(e_6)) \\
& \omega(f(e_4), e_4, e_6) = \alpha_1 \omega(e_1, e_4, e_6) + \alpha_2 \omega(e_2, e_4, e_6) + \alpha_3 \omega(e_3, e_4, e_6) + \alpha_4 \omega(e_4, e_4, e_6) + \\
& \alpha_5 \omega(e_5, e_4, e_6) + \alpha_6 \omega(e_6, e_4, e_6) = -\alpha_5 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * \omega(f(e_5), e_5, e_1) = \omega(e_5, f(e_5), e_1) = \omega(e_5, e_5, f(e_1)) \\
& \omega(f(e_5), e_5, e_1) = \mu_1 \omega(e_1, e_5, e_1) + \mu_2 \omega(e_2, e_5, e_1) + \mu_3 \omega(e_3, e_5, e_1) + \mu_4 \omega(e_4, e_5, e_1) + \\
& \mu_5 \omega(e_5, e_5, e_1) + \mu_6 \omega(e_6, e_5, e_1) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * \omega(f(e_5), e_5, e_2) = \omega(e_5, f(e_5), e_2) = \omega(e_5, e_5, f(e_2)) \\
& \omega(f(e_5), e_5, e_2) = \mu_1 \omega(e_1, e_5, e_2) + \mu_2 \omega(e_2, e_5, e_2) + \mu_3 \omega(e_3, e_5, e_2) + \mu_4 \omega(e_4, e_5, e_2) + \\
& \mu_5 \omega(e_5, e_5, e_2) + \mu_6 \omega(e_6, e_5, e_2) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * \omega(f(e_5), e_5, e_3) = \omega(e_5, f(e_5), e_3) = \omega(e_5, e_5, f(e_3)) \\
& \omega(f(e_5), e_5, e_3) = \mu_1 \omega(e_1, e_5, e_3) + \mu_2 \omega(e_2, e_5, e_3) + \mu_3 \omega(e_3, e_5, e_3) + \mu_4 \omega(e_4, e_5, e_3) + \\
& \mu_5 \omega(e_5, e_5, e_3) + \mu_6 \omega(e_6, e_5, e_3) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * \omega(f(e_5), e_5, e_4) = \omega(e_5, f(e_5), e_4) = \omega(e_5, e_5, f(e_4)) \\
& \omega(f(e_5), e_5, e_4) = \mu_1 \omega(e_1, e_5, e_4) + \mu_2 \omega(e_2, e_5, e_4) + \mu_3 \omega(e_3, e_5, e_4) + \mu_4 \omega(e_4, e_5, e_4) + \\
& \mu_5 \omega(e_5, e_5, e_4) + \mu_6 \omega(e_6, e_5, e_4) = -\mu_6 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * \omega(f(e_5), e_5, e_6) = \omega(e_5, f(e_5), e_6) = \omega(e_5, e_5, f(e_6)) \\
& \omega(f(e_5), e_5, e_6) = \mu_1 \omega(e_1, e_5, e_6) + \mu_2 \omega(e_2, e_5, e_6) + \mu_3 \omega(e_3, e_5, e_6) + \mu_4 \omega(e_4, e_5, e_6) + \\
& \mu_5 \omega(e_5, e_5, e_6) + \mu_6 \omega(e_6, e_5, e_6) = \mu_4 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * \omega(f(e_6), e_6, e_1) = \omega(e_6, f(e_6), e_1) = \omega(e_6, e_6, f(e_1)) \\
& \omega(f(e_6), e_6, e_1) = \delta_1 \omega(e_1, e_6, e_1) + \delta_2 \omega(e_2, e_6, e_1) + \delta_3 \omega(e_3, e_6, e_1) + \delta_4 \omega(e_4, e_6, e_1) + \\
& \delta_5 \omega(e_5, e_6, e_1) + \delta_6 \omega(e_6, e_6, e_1) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& * \omega(f(e_6), e_6, e_2) = \omega(e_6, f(e_6), e_2) = \omega(e_6, e_6, f(e_2)) \\
& \omega(f(e_6), e_6, e_2) = \delta_1 \omega(e_1, e_6, e_2) + \delta_2 \omega(e_2, e_6, e_2) + \delta_3 \omega(e_3, e_6, e_2) + \delta_4 \omega(e_4, e_6, e_2) + \\
& \delta_5 \omega(e_5, e_6, e_2) + \delta_6 \omega(e_6, e_6, e_2) = 0.
\end{aligned}$$

$$* \omega(f(e_6), e_6, e_3) = \omega(e_6, f(e_6), e_3) = \omega(e_6, e_6, f(e_3))$$

$$\omega(f(e_6), e_6, e_3) = \delta_1\omega(e_1, e_6, e_3) + \delta_2\omega(e_2, e_6, e_3) + \delta_3\omega(e_3, e_6, e_3) + \delta_4\omega(e_4, e_6, e_3) + \delta_5\omega(e_5, e_6, e_3) + \delta_6\omega(e_6, e_6, e_3) = 0.$$

$$*\omega(f(e_6), e_6, e_4) = \omega(e_6, f(e_6), e_4) = \omega(e_6, e_6, f(e_4))$$

$$\omega(f(e_6), e_6, e_4) = \delta_1\omega(e_1, e_6, e_4) + \delta_2\omega(e_2, e_6, e_4) + \delta_3\omega(e_3, e_6, e_4) + \delta_4\omega(e_4, e_6, e_4) + \delta_5\omega(e_5, e_6, e_4) + \delta_6\omega(e_6, e_6, e_4) = \delta_5 = -\delta_5 = 0.$$

$$*\omega(f(e_6), e_6, e_5) = \omega(e_6, f(e_6), e_5) = \omega(e_6, e_6, f(e_5))$$

$$\omega(f(e_6), e_6, e_5) = \delta_1\omega(e_1, e_6, e_5) + \delta_2\omega(e_2, e_6, e_5) + \delta_3\omega(e_3, e_6, e_5) + \delta_4\omega(e_4, e_6, e_5) + \delta_5\omega(e_5, e_6, e_5) + \delta_6\omega(e_6, e_6, e_5) = -\delta_4 = 0.$$

Après calcul, on trouve,

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Donc

$$C(\omega_{6,1}) \simeq K \times K$$

De même si $\omega = \omega_{6,2} = e_1e_2e_4 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(e_1, e_2, e_4) = \omega(e_2, e_3, e_5) = \omega(e_1, e_3, e_6) = 1 \\ \text{et} \\ \omega(e_i, e_j, e_k) = 0 \end{array} \right.$$

Dans les autres cas, si $f \in C(\omega_{6,2})$, alors, $f : E \rightarrow E$ et,

$$\omega(f(e_1), e_2, e_4) = \omega(e_1, f(e_2), e_4) = \omega(e_1, e_2, f(e_4))$$

$$\omega(f(e_2), e_3, e_5) = \omega(e_2, f(e_3), e_5) = \omega(e_2, e_3, f(e_5))$$

$$\omega(f(e_1), e_3, e_6) = \omega(e_1, f(e_3), e_6) = \omega(e_1, e_3, f(e_6))$$

Soit la matrice associé à f

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) & f(e_5) & f(e_6) \\ \lambda_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & \mu_1 & \delta_1 \\ \lambda_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \mu_2 & \delta_2 \\ \lambda_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \alpha_3 & \mu_3 & \delta_3 \\ \lambda_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \alpha_4 & \mu_4 & \delta_4 \\ \lambda_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \alpha_5 & \mu_5 & \delta_5 \\ \lambda_6 & \beta_6 & \gamma_6 & \alpha_6 & \mu_6 & \delta_6 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{matrix}$$

On calcule,

$$*\omega(f(e_1), e_2, e_4) = \omega(e_1, f(e_2), e_4) = \omega(e_1, e_2, f(e_4)).$$

$$f(e_1) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6.$$

$$f(e_2) = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5 + \beta_6 e_6.$$

$$f(e_4) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6.$$

$$\omega(f(e_1), e_2, e_4) = \omega(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6, e_2, e_4) = \lambda_1 \omega(e_1, e_2, e_4) + \lambda_2 \omega(e_2, e_2, e_4) + \lambda_3 \omega(e_3, e_2, e_4) + \lambda_4 \omega(e_4, e_2, e_4) + \lambda_5 \omega(e_5, e_2, e_4) + \lambda_6 \omega(e_6, e_2, e_4) =$$

$$\lambda_1 = \beta_2 = \alpha_4.$$

$$*\omega(f(e_2), e_3, e_5) = \omega(e_2, f(e_3), e_5) = \omega(e_2, e_3, f(e_5)).$$

$$f(e_3) = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4 + \gamma_5 e_5 + \gamma_6 e_6.$$

$$f(e_5) = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4 + \mu_5 e_5 + \mu_6 e_6.$$

$$\omega(f(e_2), e_3, e_5) = \omega(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5 + \beta_6 e_6, e_3, e_5) = \beta_1 \omega(e_1, e_3, e_5) + \beta_2 \omega(e_2, e_3, e_5) + \beta_3 \omega(e_3, e_3, e_5) + \beta_4 \omega(e_4, e_3, e_5) + \beta_5 \omega(e_5, e_3, e_5) + \beta_6 \omega(e_6, e_3, e_5) =$$

$$\beta_2 = \gamma_3 = \mu_5.$$

$$*\omega(f(e_1), e_3, e_6) = \omega(e_1, f(e_3), e_6) = \omega(e_1, e_3, f(e_6)).$$

$$f(e_6) = \delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + \delta_3 e_3 + \delta_4 e_4 + \delta_5 e_5 + \delta_6 e_6.$$

$$f(e_3) = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4 + \gamma_5 e_5 + \gamma_6 e_6.$$

$$\omega(f(e_1), e_3, e_6) = \omega(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 + \lambda_6 e_6, e_3, e_6) = \lambda_1 \omega(e_1, e_3, e_6) + \lambda_2 \omega(e_2, e_3, e_6) + \lambda_3 \omega(e_3, e_3, e_6) + \lambda_4 \omega(e_4, e_3, e_6) + \lambda_5 \omega(e_5, e_3, e_6) + \lambda_6 \omega(e_6, e_3, e_6) =$$

$$\lambda_1 = \gamma_3 = \delta_6.$$

$$\text{Alors, } \lambda_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \alpha_4 = \delta_6.$$

$$\text{On prend } \beta = \lambda_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \alpha_4 = \delta_6.$$

$$*\omega(f(e_1), e_2, e_3) = \omega(e_1, f(e_2), e_3) = \omega(e_1, e_2, f(e_3)).$$

$$\omega(f(e_1), e_2, e_3) = \lambda_1\omega(e_1, e_2, e_3) + \lambda_2\omega(e_2, e_2, e_3) + \lambda_3\omega(e_3, e_2, e_3) + \lambda_4\omega(e_4, e_2, e_3) + \lambda_5\omega(e_5, e_2, e_3) + \lambda_6\omega(e_6, e_2, e_3) = \lambda_5 = -\beta_6 = \gamma_4.$$

On pend , $\alpha = \lambda_5 = \gamma_4 = -\beta_6$.

Donc, $\lambda_5 = \gamma_4 = \alpha$. et $\beta_6 = -\alpha$.

$$*\omega(f(e_1), e_1, e_2) = \omega(e_1, f(e_1), e_2) = \omega(e_1, e_1, f(e_2)).$$

$$\omega(f(e_1), e_1, e_2) = \lambda_1\omega(e_1, e_1, e_2) + \lambda_2\omega(e_2, e_1, e_2) + \lambda_3\omega(e_3, e_1, e_2) + \lambda_4\omega(e_4, e_1, e_2) + \lambda_5\omega(e_5, e_1, e_2) + \lambda_6\omega(e_6, e_1, e_2) = -\lambda_4 = -\lambda_4 = 0.$$

$$*\omega(f(e_1), e_1, e_3) = \omega(e_1, f(e_1), e_3) = \omega(e_1, e_1, f(e_3)).$$

$$\omega(f(e_1), e_1, e_3) = \lambda_1\omega(e_1, e_1, e_3) + \lambda_2\omega(e_2, e_1, e_3) + \lambda_3\omega(e_3, e_1, e_3) + \lambda_4\omega(e_4, e_1, e_3) + \lambda_5\omega(e_5, e_1, e_3) + \lambda_6\omega(e_6, e_1, e_3) = -\lambda_6 = 0.$$

$$*\omega(f(e_1), e_3, e_3) = \omega(e_1, f(e_3), e_3) = \omega(e_1, e_3, f(e_3)).$$

$$\omega(e_1, f(e_3), e_3) = \gamma_1\omega(e_1, e_1, e_3) + \gamma_2\omega(e_1, e_2, e_3) + \gamma_3\omega(e_1, e_3, e_3) + \gamma_4\omega(e_1, e_4, e_3) + \gamma_5\omega(e_1, e_5, e_3) + \gamma_6\omega(e_1, e_6, e_3) = -\gamma_6 = \gamma_6 = 0.$$

$$*\omega(f(e_1), e_2, e_5) = \omega(e_1, f(e_2), e_5) = \omega(e_1, e_2, f(e_5)).$$

$$\omega(f(e_1), e_2, e_5) = \lambda_1\omega(e_1, e_2, e_5) + \lambda_2\omega(e_2, e_2, e_5) + \lambda_3\omega(e_3, e_2, e_5) + \lambda_4\omega(e_4, e_2, e_5) + \lambda_5\omega(e_5, e_2, e_5) + \lambda_6\omega(e_6, e_2, e_5) = -\lambda_3 = 0 = \mu_4.$$

$$*\omega(f(e_1), e_2, e_6) = \omega(e_1, f(e_2), e_6) = \omega(e_1, e_2, f(e_6)).$$

$$\omega(f(e_1), e_2, e_6) = \lambda_1\omega(e_1, e_2, e_6) + \lambda_2\omega(e_2, e_2, e_6) + \lambda_3\omega(e_3, e_2, e_6) + \lambda_4\omega(e_4, e_2, e_6) + \lambda_5\omega(e_5, e_2, e_6) + \lambda_6\omega(e_6, e_2, e_6) = 0 = \beta_3 = \delta_4.$$

$$*\omega(f(e_2), e_4, e_5) = \omega(e_2, f(e_4), e_5) = \omega(e_2, e_4, f(e_5))$$

$$\omega(e_2, f(e_4), e_5) = \alpha_1\omega(e_2, e_1, e_5) + \alpha_2\omega(e_2, e_2, e_5) + \alpha_3\omega(e_2, e_3, e_5) + \alpha_4\omega(e_2, e_4, e_5) + \alpha_5\omega(e_2, e_5, e_5) + \alpha_6\omega(e_2, e_6, e_5) = 0 = \alpha_3 = \mu_1.$$

$$*\omega(f(e_2), e_2, e_3) = \omega(e_2, f(e_2), e_3) = \omega(e_2, e_2, f(e_3))$$

$$\omega(f(e_2), e_2, e_3) = \beta_1\omega(e_1, e_2, e_3) + \beta_2\omega(e_2, e_2, e_3) + \beta_3\omega(e_3, e_2, e_3) + \beta_4\omega(e_4, e_2, e_3) + \beta_5\omega(e_5, e_2, e_3) + \beta_6\omega(e_6, e_2, e_3) = \beta_5 = -\beta_5 = 0.$$

$$*\omega(f(e_2), e_3, e_4) = \omega(e_2, f(e_3), e_4) = \omega(e_2, e_3, f(e_4))$$

$$\omega(f(e_2), e_3, e_4) = \beta_1\omega(e_1, e_3, e_4) + \beta_2\omega(e_2, e_3, e_4) + \beta_3\omega(e_3, e_3, e_4) + \beta_4\omega(e_4, e_3, e_4) + \beta_5\omega(e_5, e_3, e_4) + \beta_6\omega(e_6, e_3, e_4) = 0 = -\gamma_1 = \alpha_5.$$

$$*\omega(f(e_1), e_3, e_5) = \omega(e_1, f(e_3), e_5) = \omega(e_1, e_3, f(e_5))$$

$$\omega(f(e_1), e_3, e_5) = \lambda_1\omega(e_1, e_3, e_5) + \lambda_2\omega(e_2, e_3, e_5) + \lambda_3\omega(e_3, e_3, e_5) + \lambda_4\omega(e_4, e_3, e_5) + \lambda_5\omega(e_5, e_3, e_5) + \lambda_6\omega(e_6, e_3, e_5) = \lambda_2 = 0 = \mu_6.$$

$$*\omega(f(e_2), e_3, e_6) = \omega(e_2, f(e_3), e_6) = \omega(e_2, e_3, f(e_6))$$

$$\omega(f(e_2), e_3, e_6) = \beta_1\omega(e_1, e_3, e_6) + \beta_2\omega(e_2, e_3, e_6) + \beta_3\omega(e_3, e_3, e_6) + \beta_4\omega(e_4, e_3, e_6) + \beta_5\omega(e_5, e_3, e_6) + \beta_6\omega(e_6, e_3, e_6) = \beta_1 = 0 = \delta_5.$$

$$*\omega(f(e_2), e_4, e_6) = \omega(e_2, f(e_4), e_6) = \omega(e_2, e_4, f(e_6))$$

$$\omega(e_2, e_4, f(e_6)) = \delta_1\omega(e_2, e_4, e_1) + \delta_2\omega(e_2, e_4, e_2) + \delta_3\omega(e_2, e_4, e_3) + \delta_4\omega(e_2, e_4, e_4) + \delta_5\omega(e_2, e_4, e_5) + \delta_6\omega(e_2, e_4, e_6) = -\delta_1 = \delta_1 = 0.$$

$$*\omega(f(e_2), e_5, e_6) = \omega(e_2, f(e_5), e_6) = \omega(e_2, e_5, f(e_6))$$

$$\omega(e_2, e_5, f(e_6)) = \delta_1\omega(e_2, e_5, e_1) + \delta_2\omega(e_2, e_5, e_2) + \delta_3\omega(e_2, e_5, e_3) + \delta_4\omega(e_2, e_5, e_4) + \delta_5\omega(e_2, e_5, e_5) + \delta_6\omega(e_2, e_5, e_6) = -\delta_3 = \delta_3 = 0.$$

$$*\omega(f(e_1), e_3, e_4) = \omega(e_1, f(e_3), e_4) = \omega(e_1, e_3, f(e_4))$$

$$\omega(f(e_1), e_3, e_4) = \lambda_1\omega(e_1, e_3, e_4) + \lambda_2\omega(e_2, e_3, e_4) + \lambda_3\omega(e_3, e_3, e_4) + \lambda_4\omega(e_4, e_3, e_4) + \lambda_5\omega(e_5, e_3, e_4) + \lambda_6\omega(e_6, e_3, e_4) = 0 = \gamma_2 = \alpha_6.$$

$$*\omega(f(e_1), e_4, e_5) = \omega(e_1, f(e_4), e_5) = \omega(e_1, e_4, f(e_5))$$

$$\omega(e_1, e_4, f(e_5)) = \mu_1\omega(e_1, e_4, e_1) + \mu_2\omega(e_1, e_4, e_2) + \mu_3\omega(e_1, e_4, e_3) + \mu_4\omega(e_1, e_4, e_4) + \mu_5\omega(e_1, e_4, e_5) + \mu_6\omega(e_1, e_4, e_6) = -\mu_2 = 0.$$

$$*\omega(f(e_1), e_5, e_6) = \omega(e_1, f(e_5), e_6) = \omega(e_1, e_5, f(e_6))$$

$$\omega(e_1, f(e_5), e_6) = \mu_1\omega(e_1, e_1, e_6) + \mu_2\omega(e_1, e_2, e_6) + \mu_3\omega(e_1, e_3, e_6) + \mu_4\omega(e_1, e_4, e_6) + \mu_5\omega(e_1, e_5, e_6) + \mu_6\omega(e_1, e_6, e_6) = \mu_3 = 0.$$

$$*\omega(f(e_1), e_2, e_2) = \omega(e_1, f(e_2), e_2) = \omega(e_1, e_2, f(e_2))$$

$$\omega(e_1, f(e_2), e_2) = \beta_1\omega(e_1, e_1, e_2) + \beta_2\omega(e_1, e_2, e_2) + \beta_3\omega(e_1, e_3, e_2) + \beta_4\omega(e_1, e_4, e_2) + \beta_5\omega(e_1, e_5, e_2) + \beta_6\omega(e_1, e_6, e_2) = -\beta_4 = 0.$$

$$*\omega(f(e_3), e_3, e_1) = \omega(e_3, f(e_3), e_1) = \omega(e_3, e_3, f(e_1))$$

$$\omega(f(e_3), e_3, e_1) = \gamma_1\omega(e_1, e_3, e_1) + \gamma_2\omega(e_2, e_3, e_1) + \gamma_3\omega(e_3, e_3, e_1) + \gamma_4\omega(e_4, e_3, e_1) + \gamma_5\omega(e_5, e_3, e_1) + \gamma_6\omega(e_6, e_3, e_1) = -\gamma_6 = -\gamma_6 = 0.$$

$$*\omega(f(e_3), e_3, e_2) = \omega(e_3, f(e_3), e_2) = \omega(e_3, e_3, f(e_2))$$

$$\omega(f(e_3), e_3, e_2) = \gamma_1\omega(e_1, e_3, e_2) + \gamma_2\omega(e_2, e_3, e_2) + \gamma_3\omega(e_3, e_3, e_2) + \gamma_4\omega(e_4, e_3, e_2) + \gamma_5\omega(e_5, e_3, e_2) + \gamma_6\omega(e_6, e_3, e_2) = \gamma_5 = 0.$$

$$*\omega(f(e_3), e_5, e_6) = \omega(e_3, f(e_5), e_6) = \omega(e_3, e_5, f(e_6))$$

$$\omega(e_3, f(e_5), e_6) = \mu_1\omega(e_3, e_1, e_6) + \mu_2\omega(e_3, e_2, e_6) + \mu_3\omega(e_3, e_3, e_6) + \mu_4\omega(e_3, e_4, e_6) + \mu_5\omega(e_3, e_5, e_6) + \mu_6\omega(e_3, e_6, e_6) = 0 = \mu_1 = \delta_2.$$

$$*\omega(f(e_3), e_4, e_5) = \omega(e_3, f(e_4), e_5) = \omega(e_3, e_4, f(e_5))$$

$$\omega(e_3, f(e_4), e_5) = \alpha_1\omega(e_3, e_1, e_5) + \alpha_2\omega(e_3, e_2, e_5) + \alpha_3\omega(e_3, e_3, e_5) + \alpha_4\omega(e_3, e_4, e_5) + \alpha_5\omega(e_3, e_5, e_5) + \alpha_6\omega(e_3, e_6, e_5) = 0 = -\alpha_2 = 0.$$

$$*\omega(f(e_3), e_4, e_6) = \omega(e_3, f(e_4), e_6) = \omega(e_3, e_4, f(e_6))$$

$$\omega(e_3, f(e_4), e_6) = \alpha_1\omega(e_3, e_1, e_6) + \alpha_2\omega(e_3, e_2, e_6) + \alpha_3\omega(e_3, e_3, e_6) + \alpha_4\omega(e_3, e_4, e_6) + \alpha_5\omega(e_3, e_5, e_6) + \alpha_6\omega(e_3, e_6, e_6) = 0 = -\alpha_1 = 0.$$

D'où la matrice est,

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix},$$

$$\text{où } A = \beta I_3, B = \beta I_3, \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \beta, \alpha \in K.$$

Désignons par $\varepsilon : E \rightarrow E$, l'application linéaire définie par : $\varepsilon(e_1) = e_5, \varepsilon(e_2) = e_6, \varepsilon(e_3) = e_4$, et $\varepsilon(e_i) = 0$, si $i \in \{4, 5, 6\}$, alors :

$$C(\omega) = K[\varepsilon]$$

où

$$\varepsilon^2 = 0. \blacksquare$$

2.2.4 Le commutant des trivecules de rang 7

Théorème 2.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K , de dimension 7, alors*

Tableau 1. commutant des trivecteurs de rang 7.

Nome	Trivecteur	$C(\omega)$
$\omega_{7,1}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7)$	K
$\omega_{7,2}$	$\omega_{7,1} + e_2e_4e_6$	K
$\omega_{7,3}$	$e_1e_2e_3 + e_1e_4e_5 + e_2e_6e_7$	K
$\omega_{7,4}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_7$	K
$\omega_{7,5}$	$\omega_{7,2} + e_3e_5e_7$	K

Preuve. Soit $\dim E = 7$, la base de E est $\{e_1, \dots, e_7\}$.

Pour $\omega_{7,1} = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_5 + e_1e_6e_7$,

On a, $f \in C(\omega_{7,1})$ tel que, $f : E \rightarrow E$ et,

$$\begin{aligned}\omega(f(e_1), e_2, e_3) &= \omega(e_1, f(e_2), e_3) = \omega(e_1, e_2, f(e_3)) \\ \omega(f(e_1), e_4, e_5) &= \omega(e_1, f(e_4), e_5) = \omega(e_1, e_4, f(e_5)) \\ \omega(f(e_1), e_6, e_7) &= \omega(e_1, f(e_6), e_7) = \omega(e_1, e_6, f(e_7))\end{aligned}$$

Avec,

$$\begin{cases} \omega(e_1, e_2, e_3) = \omega(e_1, e_4, e_5) = \omega(e_1, e_6, e_7) = 1 \\ \omega(e_i, e_j, e_k) = 0 \end{cases}$$

La matrice associée à f ,

$$M(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \eta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \eta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \lambda_3 & \mu_3 & \eta_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \lambda_4 & \mu_4 & \eta_4 & \delta_4 \\ \alpha_5 & \beta_5 & \gamma_5 & \lambda_5 & \mu_5 & \eta_3 & \delta_3 \\ \alpha_6 & \beta_6 & \gamma_6 & \lambda_6 & \mu_6 & \eta_6 & \delta_6 \\ \alpha_7 & \beta_7 & \gamma_7 & \lambda_7 & \mu_7 & \eta_7 & \delta_7 \end{pmatrix}$$

Donc on a,

$$\star\omega(f(e_1), e_2, e_3) = \omega(e_1, f(e_2), e_3) = \omega(e_1, e_2, f(e_3))$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3$$

$$\star\omega(f(e_1), e_4, e_5) = \omega(e_1, f(e_4), e_5) = \omega(e_1, e_4, f(e_5))$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \lambda_4 = \mu_5$$

$$\star\omega(f(e_1), e_6, e_7) = \omega(e_1, f(e_6), e_7) = \omega(e_1, e_6, f(e_7))$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \eta_6 = \delta_7$$

Alors,

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \lambda_4 = \mu_5 = \eta_6 = \delta_7.$$

$$\star\omega(f(e_1), e_2, e_4) = \omega(e_1, f(e_2), e_4) = \omega(e_1, e_2, f(e_4))$$

$$0 = -\beta_5 = \lambda_3$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \beta_5 = 0$$

$$\star\omega(f(e_1), e_3, e_4) = \omega(e_1, f(e_3), e_4) = \omega(e_1, e_3, f(e_4))$$

$$0 = -\gamma_5 = -\lambda_2$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \gamma_5 = 0$$

$$\star\omega(f(e_1), e_2, e_5) = \omega(e_1, f(e_2), e_5) = \omega(e_1, e_2, f(e_5))$$

$$0 = \beta_4 = \mu_3$$

$$\Rightarrow \beta_4 = \mu_3 = 0$$

$$\star\omega(f(e_1), e_3, e_5) = \omega(e_1, f(e_3), e_5) = \omega(e_1, e_3, f(e_5))$$

$$0 = \gamma_4 = \mu_2$$

$$\Rightarrow \gamma_4 = \mu_2 = 0$$

$$\star\omega(f(e_1), e_6, e_4) = \omega(e_1, f(e_6), e_4) = \omega(e_1, e_6, f(e_4))$$

$$0 = -\eta_5 = \lambda_7$$

$$\Rightarrow \eta_5 = \lambda_7 = 0$$

$$\star\omega(f(e_1), e_7, e_4) = \omega(e_1, f(e_7), e_4) = \omega(e_1, e_7, f(e_4))$$

$$0 = -\delta_5 = -\lambda_6$$

$$\Rightarrow \delta_5 = \lambda_6 = 0$$

$$\star\omega(f(e_1), e_6, e_5) = \omega(e_1, f(e_6), e_5) = \omega(e_1, e_6, f(e_5))$$

$$0 = \eta_4 = \mu_7$$

$$\Rightarrow \mu_7 = \eta_4 = 0$$

$$\star\omega(f(e_1), e_7, e_5) = \omega(e_1, f(e_7), e_5) = \omega(e_1, e_7, f(e_5))$$

$$0 = \delta_4 = -\mu_6$$

$$\Rightarrow \mu_6 = \delta_4 = 0$$

$$\star\omega(f(e_1), e_2, e_6) = \omega(e_1, f(e_2), e_6) = \omega(e_1, e_2, f(e_6))$$

$$0 = -\beta_7 = \eta_3$$

$$\Rightarrow \beta_7 = \eta_3 = 0$$

$$\star\omega(f(e_1), e_3, e_6) = \omega(e_1, f(e_3), e_6) = \omega(e_1, e_3, f(e_6))$$

$$0 = -\gamma_7 = -\eta_2$$

$$\Rightarrow \gamma_7 = \eta_2 = 0$$

$$\star\omega(f(e_1), e_2, e_7) = \omega(e_1, f(e_2), e_7) = \omega(e_1, e_2, f(e_7))$$

$$0 = \beta_6 = \delta_3$$

$$\Rightarrow \beta_6 = \delta_3 = 0$$

$$\star\omega(f(e_1), e_3, e_7) = \omega(e_1, f(e_3), e_7) = \omega(e_1, e_3, f(e_7))$$

$$0 = \gamma_6 = -\delta_2$$

$$\Rightarrow \gamma_6 = \delta_2 = 0$$

$$\star\omega(f(e_2), e_3, e_4) = \omega(e_2, f(e_3), e_4) = \omega(e_2, e_3, f(e_4))$$

$$0 = 0 = \lambda_1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\star\omega(f(e_2), e_3, e_5) = \omega(e_2, f(e_3), e_5) = \omega(e_2, e_3, f(e_5))$$

$$0 = 0 = \mu_1$$

$$\Rightarrow \mu_1 = 0$$

$$\star\omega(f(e_2), e_3, e_6) = \omega(e_2, f(e_3), e_6) = \omega(e_2, e_3, f(e_6))$$

$$0 = 0 = \eta_1$$

$$\Rightarrow \eta = 0$$

$$\star\omega(f(e_2), e_3, e_7) = \omega(e_2, f(e_3), e_7) = \omega(e_2, e_3, f(e_7))$$

$$0 = 0 = \delta_1$$

$$\Rightarrow \delta_1 = 0$$

$$\star\omega(f(e_2), e_6, e_7) = \omega(e_2, f(e_6), e_7) = \omega(e_2, e_6, f(e_7))$$

$$\beta_1 = 0 = 0$$

$$\Rightarrow \beta_1 = 0$$

$$\star\omega(f(e_3), e_6, e_7) = \omega(e_3, f(e_6), e_7) = \omega(e_3, e_6, f(e_7))$$

$$\gamma_1 = 0 = 0$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
& \star \omega(f(e_1), e_1, e_2) = \omega(e_1, f(e_1), e_2) = \omega(e_1, e_1, f(e_2)) = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \\
& \star \omega(f(e_1), e_1, e_3) = \omega(e_1, f(e_1), e_3) = \omega(e_1, e_1, f(e_3)) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\
& \star \omega(f(e_1), e_1, e_4) = \omega(e_1, f(e_1), e_4) = \omega(e_1, e_1, f(e_4)) = 0 \Rightarrow \alpha_5 = 0 \\
& \star \omega(f(e_1), e_1, e_5) = \omega(e_1, f(e_1), e_5) = \omega(e_1, e_1, f(e_5)) = 0 \Rightarrow \alpha_4 = 0 \\
& \star \omega(f(e_1), e_1, e_6) = \omega(e_1, f(e_1), e_6) = \omega(e_1, e_1, f(e_6)) = 0 \Rightarrow \alpha_7 = 0 \\
& \star \omega(f(e_1), e_1, e_7) = \omega(e_1, f(e_1), e_7) = \omega(e_1, e_1, f(e_7)) = 0 \Rightarrow \alpha_6 = 0 \\
& \star \omega(f(e_2), e_2, e_1) = \omega(e_2, f(e_2), e_1) = \omega(e_2, e_2, f(e_1)) = 0 \Rightarrow \beta_3 = 0 \\
& \star \omega(f(e_3), e_3, e_1) = \omega(e_3, f(e_3), e_1) = \omega(e_3, e_3, f(e_1)) = 0 \Rightarrow \gamma_2 = 0 \\
& \star \omega(f(e_4), e_4, e_1) = \omega(e_4, f(e_4), e_1) = \omega(e_4, e_4, f(e_1)) = 0 \Rightarrow \lambda_5 = 0 \\
& \star \omega(f(e_5), e_5, e_1) = \omega(e_5, f(e_5), e_1) = \omega(e_5, e_5, f(e_1)) = 0 \Rightarrow \mu_4 = 0 \\
& \star \omega(f(e_6), e_6, e_1) = \omega(e_6, f(e_6), e_1) = \omega(e_6, e_6, f(e_1)) = 0 \Rightarrow \eta_7 = 0 \\
& \star \omega(f(e_7), e_7, e_1) = \omega(e_7, f(e_7), e_1) = \omega(e_7, e_7, f(e_1)) = 0 \Rightarrow \delta_6 = 0
\end{aligned}$$

Donc la matrice associée à f est,

$$M(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} = \alpha_1 I_7$$

C'est-à-dire

$$C(\omega_{7.1}) = K$$

La même méthode et par un calcul direct, on trouve, pour $\omega_{7,i}$, $2 \leq i \leq 5$

$$C(\omega_{7.i}) = K$$

■

2.2.5 Commutant des trivecteurs de rang 8

Théorème 2.2 [15] *Le commutant des triveceurs de rang 8, est donné par :*

.Tableau 1.

$\omega_{8,i}$	<i>Expression d'un représentant de l'orbite</i>	$C(\omega)$
$\omega_{8,1}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6e_7e_8$	$K \times K$
$\omega_{8,2}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_5e_6e_8$	$K[\varepsilon]$
$\omega_{8,3}$	$e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_5 + e_7e_8)$	$K[\varepsilon]$
$\omega_{8,4}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_7 + e_4e_8)$	K
$\omega_{8,5}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_3 + e_7e_8)$	K
$\omega_{8,6}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_8(e_4e_3 + e_5e_6)$	K
$\omega_{8,7}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_6 + e_5e_7) + e_2(e_5e_6 + e_7e_8)$	K
$\omega_{8,8}$	$e_1(e_2e_8 + e_3e_6 + e_4e_7) + e_6e_7e_8 + e_3e_4e_5$	K
$\omega_{8,9}$	$e_1[e_2(e_3 + e_4) + e_5e_6] + e_3e_5e_7 + e_4e_6e_8$	K
$\omega_{8,10}$	$e_1(e_2e_8 + e_6e_7) + e_2e_3e_5 + e_3e_4e_6 + e_4e_5e_7$	K
$\omega_{8,11}$	$e_1(e_3e_7 + e_5e_4 + e_8e_2) + e_8(e_4e_3 + e_6e_7) + e_2e_4e_6$	K
$\omega_{8,12}$	$e_1[(e_4 - e_7)(e_3 - e_8) + e_5e_7] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$	K
$\omega_{8,13}$	$e_1[e_5(e_3 - e_7) + e_8e_4] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$	K

Conclusion

L'étude présentée dans ce mémoire s'articule essentiellement sur la classification des trivecteurs de rang ≤ 8 , et leurs commutants.

Cette classification est interprétable pour décrire certaines classifications des courbes elliptiques [1].

Notons que l'application des courbes elliptiques à la cryptographie est relativement récente,

d'où l'importance de cette classification en cryptographie.

Notons aussi que cette classification aide à résoudre certains problèmes en théorie des codes [11], [14].

Bibliographie

- [1] **Abou Hashih, M., Bénéteau, L.** (2004) An alternative way to classify some Generalized elliptic
- [2] **N.Bourbaki** , Algèbre, chapitres 1 à 3 , Hermann , Paris , 1970.
- [3] **A.Cohen et A.Helminck** , Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 7 , Communications in Algebra 16(1) , 1988 , p.1-25.
- [4] **D.Djokovic's** , Classification of trivectors of an eight dimensional real vector space , Linear and multilinear Algebra , 13(3) , 1983 , p.3-39.
- [5] **G.B.Gurevitch** , Theory of algebraic invariants . P.Noordhof LTD ,Groningen , the Netherland , 1964..
- [6] **B.Kahn** , Sommes de tenseurs décomposables , Prépublication de l'université Paris VII , Mai 1991 , 28p.
- [7] **S.Lang** , Algebra , second edition , Addison-Wesley publishing company Inc ,California 1984.
- [8] **L.Noui et Ph.Revoy**, Formes multilinéaires alternées , Ann.Math.Blaise Pascal Vol 1 , n°2 , 1994 , p.43-69
- [9] **L.Noui** , Classification des trivecteurs par l'action du groupe linéaire , Thèse de Doctorat , Université de Montpellier II , France , 1995 .
- [10] **V.L.Popov, E.B.Vinberg** , Invariant theory , Algebraic Geometry IV ,Encyclopaedia of Mathematical Sciences , Volume 55 , Springer-Verlag.
- [11] **E.M. Rains , J.A. Sloane** , Self-dual codes , Handbook of Coding Theory , pless V.S. Huffman W.C (editors) , Elsevier , Amsterdam , 1998 , p.177-294.
- [12] **Ph.Revoy** , Trivecteurs de rang 6 , in coll. Sur les formes quadratiques , Bulletin SMF , 59 , 1979 , p.141-155.

- [13] **Ph.Revoy** , Formes trilinéaires alternées de Rang 7 , Bul.Sc. Math.112 ,1988 , p.357-368.
- [14] **Rakdi .M.A. et Midoune N.** Weights of the F_q -forms of 2-step splitting trivectors of rank 8 over a finite field, Carpathian Mathematical Publications, Vol. 11 No. 2 (2019)
- [15] **L.Noui** , Trivecteurs de rang 8 sur un corps algébriquement clos , C.R.Acad. Sci.Paris , t.324 , série i , Algèbre , 1997, p.611-614.

Résumé :

L'étude présentée dans ce mémoire s'articule essentiellement sur la classification des trivecteurs (ou formes trilineaires alternées).

Pour classifier les trivecteurs, on utilise des invariants algébriques qui permettent de mieux comprendre la classification de ces formes, par exemple, le commutant $C(\omega)$ d'un trivecteur ω (ou forme trilineaire alternée) qu'il a été introduit par B.Kahn.

Dans ce mémoire, nous rappelons l'essentiel des résultats connus sur la classification des trivecteurs, puis nous déterminons les commutants de certains trivecteurs.

Abstract:

The study presented in this memoir is essentially about the classification of trivectors (or alternate trilinear forms).

To classify the trivectors, we use algebraic invariants that allow us to better understand the classification of these forms, for example, the commutant $C(\omega)$ of a trivector ω (or alternante trilinear form) which was introduced by **B.Kahn**.

In this brief, we recall the main points of the known results on the classification of trivectors, then we determine the commutant of some trivectors.

In addition to this, you need to know more about it.

الملخص :

تستند الدراسة المقدمة في هذه المذكرة بشكل أساسي على تصنيف الأشعة الثلاثية (أو أشكال ثلاثية خطية بديلة).

لتصنيف الأشعة الثلاثية تستخدم الثوابت الجبرية التي تسمح لنا بفهم أفضل لتصنيف هذه الأشكال .

مثلا المبدل $C(\omega)$ للأشعة الثلاثية الذي تم تقديمه بواسطة **B.Kahn** .

في هذه المذكرة نذكر النتائج الأساسية المعروفة في تصنيف الأشعة الثلاثية ثم نحدد مبدلات بعض الأشعة الثلاثية

