MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE M'SILA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUES

DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude présenté pour l'obtention du diplôme
Master Académique

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Rédiger Par:

MAIZA Belkheir

Thème Sur

Les espaces réflexifs

Devant le jury composé de:

D^{r}.GUASMI.Abdelkader	Pr.	université-M'SILA	**Président**
D^{r}.HRAIZ.Tofik	M.A.A.	université-M'SILA	**Examinateur**
D^{r}.NADIR.Mostefa	Pr.	université-M'SILA	**Rapporteur**

Version de : 2015/2016

Remerciements

En premier lieu , je tient à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant , de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail .

Je tient à exprimer mon profond respect , et de reconnaissance à mon encadreur de mémoire ,Professeur **NADIR. Mustefa** et *Docteur* **: GAGUI.Bachir** *, pour ces conseils , et son encouragement*

durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire .

Je remercier sincèrement les membres du jury :

Docteur: GAGUI.Bachir *, d'avoir accepté la présidence du jury .*

*Aussi je remercier vivement , mon professeur :***NADIR. Mostefa**

d'avoir accepté l'examinateur de ce travail . Je les

remercier énormément pour l'attention qu'ils ont accordé à ce travail .

Il est important pour moi de remercier ma famille : mon père , ma mère , mes frères et mes soeurs , qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement .

Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants d'université de M'SILA

Un grand merci à mes collègues pour le soutien qui m'ont donnés .

Merci à tous ceux qui ont contribué , de prés ou de loin , à l'aboutissement de ce travail .

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma chère mère,

A mon cher père qui m'ont toujours soutenu,

Qui m'ont aide à affronter les difficultés,

A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.

A mes très chères soeurs et mon frère.

A toute ma famille.

A tous les amis.

A tous les étudiants d'université de M'SILA .

A tous..

Notations

On donne ci-dessous l'ensemble des diverses notations employées tout au long de ce mémoire. Les notations les plus spécifiques sont rappelées là où elles apparaissent.

$\mathbb{R}^d$	l'ensemble de nombre réel telque d ={1,2,3}
E	une espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
U	un opérateur linéaire
Ω	un ouvert de $\mathbb{R}^d$
$\Vert . \Vert$	la norme associée aux produits scalaires
$p.p$	On désigne par p.p. la notation qui veut dire presque partout
$\mathcal{L}^p(\Omega)$	$\{$ f mesurables sur Ω, $\int_\Omega \vert f\vert^p < +\infty\}$
$L^1(\Omega)$	$\{f$ définie sur Ω à un ensemble négligeable près ; $\int_\Omega \vert f(x)\vert dx < +\infty\}$
L^2 (Ω)	l'espace des fonctions carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dx
$L^1_{loc}(\Omega)$	$\{f; f \in L^1(K)$ pour tout compact $K \subset \Omega$
$L^p_{loc}(\Omega)$	$\{f; f \in L^p(K)$ pour tout compact $K \subset \Omega\}$
$\mathcal{L}^\infty(\Omega)$	'*ensemble des fonctions essentiellement bornées sur* Ω.
$L^\infty(\Omega)$	$\{$ f définie sur Ω à un ensemble négligeable près ; f est essentiellement bornée$\}$
E^*	dual algébrique(l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires
E'	dual topologique (le sous-espace de E^* constitué des formes linéaires continues sur E)
$\sigma(E, E')$	la topologie faible
$\sigma(E', E)$	la topologie faible*

Résumé

Dans le première chapitre on introduit ou bien on rappellée les espaces normés et les espaces complets (les espaces de Banach .espaces localements convexes et les espaces L^P) les propriétés des applications linéaires continues .On démontre le théorème de Hahn-Banach .l'équivalence de la dimension finie et la compacité d'un espace normé.

Dans le deuxième chapitre on aborde la dualité dans les espaces normés :dual topologique et ses différentes topologies (faible et faible*), la notion de la réflexivité .Un exemple d'espace réflexif et un autre non réflexif sont donnés en détail .On y démontre quelques théorèmes importants (Banach-Alaoglu-bourbaki, Kakutani .Milman-Pettis ,Eberlein-Šmulian)

Dans le troisième chapitre on étudie l'application dans ces espaces (minimisation de critère) .On va s'intéresser a l'existence de solution de la minimisation du critère et la rôle de la réflexivité dans cette minimisation

Table des matières

Introduction

L'analyse fonctionnelle est née au 20ème siècle à partir des travaux de Fredholm sur les équations intégrales, et sous l'impulsion de Hilbert, Riesz et surtout Banach. Son but est d'obtenir des propriétes des fonctions en utilisant les propriétés "abstraites" de certains espaces qui lescontiennent. Par exemple la complétude de l'espace des fonctions continues bornées en norme uniforme exprime une propriété de certaines suites de fonctions continues. Dans la pratique les espaces de Banach qui sont au coeur de la théorie sont presque toujours des espaces dont les éléments sont des fonctions (par exemple $C(X)$ ou L^p). On observera que ces espaces de Banach classiques sont "naturels" en ce sens que leur norme a toujours une définition explicite liée à la définition de l'espace lui-même (exemple L^p).

Il y a de grands théorèmes généraux et "abstraits" :Hahn-Banach, Banach- Steinhaus etc.. Leurs applications "concrètes" sont nombreuses et varièes.

On peut consulter le livre de H. Brézis (Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, 1983). On peut aussi lire le livre (historique) d'un style plus ancien de Riesz et Nagy (Leçons d'analyse fonctionnelle, Paris, Gauthier-Villars, Budapest, reédition de 1968). On trouvera enfin des compléments et exercices extrêmement nombreux dans le livre récent de Hirsch et Lacombe (Eléments d'analyse fonctionnelle). Enfin, les étudiants intéressés par l'histoire des mathématiques pourront regarder le livre de Banach (Théorie des opérations linéaires, 1932, reprinted Chelsea New-York, 1972) .

Les propiétés de séparabilité de réflexivité ,de d'uniforme convexité sont étroitement liées aux propriété de différentiabilité de la fonction $x \to ||x||$ (voir Diestel , Beauzamy). L'exsitence d'une norme équivalente qui possède de bonnes propriété géométrique est un sujet très étudié ;par exemple ,comment caractériser les espaces de banach qui possèdent une norme équivalente uniformément convexe .La géométrie des espaces de Banach a connu un développement spectaculaire depuis une vingtaine d'années, grâce entre autres aux travaux de James, Dvoretsky, Grothendieck, Lindenstrauss, Pelczyncki, Enflo, Johnson, Rosenthal, L.Schwartz et ses élèves

(Pisier, Maurey, Beauzamy ...), etc.

Chapitre 1

Rappelle sur les espaces fonctionnelles

1.1 Espaces de Banach

1.1.1 Norme

Définition 1.1.1 *[NM]*

Soit E et une espace vectoriel sur le corps $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

On appele norme sur l'espace E tout fonction notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$, tell que:

- $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \Bbbk$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$

1.1.2 Espaces Normés

Définition 1.1.2 *[NM]*

Soit E et une espace vectoriel sur le corps $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

On dit que E et une espace vectoriel normé s'il est muni d'une norm $\|x\|$

Proposition 1.1.1 *[NM]*

Tout espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est une espace métrisable.

1.1.3 Suites de Cauchy

Définition 1.1.3 *[NM]*

Soit x_n une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|.\|)$

Définition 1.1.4 *[NM]*

On dit que la suite x_n est de Cauchy si, on a la relation suivante:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall p, q \geq N_\varepsilon, \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon,$$

Lemme 1.1.1 *[NM]*

Soit x_n une suite de cauchy dans un espace normé $(E, \|.\|)$ contient une sous suite x_{nk} convergente vers x ,Alors la suite x_n est aussi convergente vers le méme élémente x

Preuve. [NM]

Soit x_n une suite de cauchy alors il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon, \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon,$$

D'ou un particulier pour $n_k \geq N_\varepsilon$, on a:

$$\begin{aligned} \forall p, n_k &\geq N_\varepsilon, \|x_p - x_{nk}\| < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \\ \lim_{n_k \to \infty} \|x_p - x_{nk}\| &= \|x_p - x\| \end{aligned}$$

D'ou la convergente de la suite x_n vers l'élémente x. ■

1.1.4 Espaces complets

Définition 1.1.5 *[NM]*

Un espaces vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et dit complet, si tout suite de Cauchy x_n d'éléments de E et une suite convergente dans E,

Autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon, on\ a\ \ \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\exists x \in E \ \ tell\ que\ \ \lim x_n = x$$

1.1.5 Espaces de Banach

Définition 1.1.6 [NM]

On appelle espaces de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de la norme

1.1.6 Espaces produit

Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés sur le mème corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors l'espace produit $E \times F$ défini par

$$G = E \times F = \{(x, y)\,,\ \text{tell que } x \in E \text{ et } y \in F\}$$

est une espace vectoriel normé sur $\mathbb{k}$, par l'une des normes produits suivantes:

- $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F \ \ \forall x \in E\ ,\ y \in F$
- $\|(x, y)\|_p = (\|x\|_E^p + \|y\|_F^p)^{\frac{1}{p}} \ \forall x \in E\ ,\ y \in F; 1 < p < \infty$
- $\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|_E + \|y\|_F\} \ \forall x \in E\ ,\ y \in F$

1.1.7 Opérateurs continus

Soit E et F deux espaces normés, un opérateur U défini sur un sous ensemble $A \subset E$ dans F et dit continu au piont x_0 de A si, on a la propriété suivante:

Pour tout suit x_n de A converge vers x_0, la suite $U(x_n)$ converge vers $U(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = U(x_0)$$

Remarque 1.1.1 [NM]

L'opérateur U et dit continu sur A s'il est continu en chaque point de l'ensemble A.

Théorème 1.1.1 [NM]

Soit E et F deux espaces normés, un opérateur U défini sur un sous ensemble $A \subset E$ dans F et dit continu partout sur A, s'il est continu en point x_0 de A

Preuve. [NM]

Soit x_n un suite convergente vers x alors, cette suite peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} x_n &= [x_0 + (x_n - x)] + (x - x_0) \\ &= y_n + (x - x_0) \end{aligned}$$

Il est claire que la suite y_n est une suite convergente vers l'élément x_0

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} [x_0 + (x_n - x)] = x_0$$

la composition des deux membres par l'opérateur U, donne

$$\begin{aligned} U(x_n) &= U(x_0 + (x_n - x)) + U(x - x_0) \\ &= U(y_n) + U(x - x_0) \end{aligned}$$

L'opérateur U étant continu au point x_0 alors, il vient

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} U(x_n) &= \lim_{n\to\infty} U(y_n) + U(x - x_0) \\ &= U(x_0) + U(x) - U(x_0) \\ &= U(x) \end{aligned}$$

■

1.1.8 Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire U défini sur E dans F est dit borné s'il existe un constante positive $C > 0$, telle que:

$$\|U(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \ \forall x \in E \tag{1}$$

Proposition 1.1.2 *[NM]*

la plus petite des constantes C vérifiant la relation (1) est appelée norme de U notée $\|U\|$ et donnée par

$$\|U\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|U(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|U(x)\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \|U(x)\|_F \tag{2}$$

Preuve. [NM]

En effet, de la relation (1), les constantes C s'écrivent

$$\frac{\left\| U\left(x\right) \right\|_{F}}{\left\| x\right\|_{E}}\leq C,\ \forall x\in E,x\neq 0$$

D'ou, il est simple de voir que la plus petit des constantes C notée$\|U\|$ s'écrire comme suit

$$\|U\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\left\| U\left(x\right) \right\|_{F}}{\left\| x\right\|_{E}}.$$

De plus, on a aussi

$$\begin{array}{rcl}
\|U\| & = & \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\left\| U\left(x\right) \right\|_{F}}{\left\| x\right\|_{E}} \\
& = & \sup\limits_{x\neq 0}\left\| \dfrac{1}{\left\| x\right\|_{E}}U\left(x\right) \right\|_{F}, \\
& = & \sup\limits_{x\neq 0}\left\| U\left(\dfrac{x}{\left\| x\right\|_{E}}\right) \right\|_{F}, \\
& = & \sup\limits_{\|x\|=1}\left\| U\left(x\right) \right\|_{F},
\end{array}$$

D'ou la deuxième egalité

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1}\left\| U\left(x\right) \right\|_{F},$$

Pour la troisième égalité, il est claire que l'on a la relation

$$\sup_{\|x\|=1}\left\| U\left(x\right) \right\|_{F}\leq \sup_{\|x\|\leq 1,x\neq 0}\left\| U\left(x\right) \right\|_{F}$$

De plus, pour tout $x\in E$ telle que $\|x\|\leq 1$ et $x\neq 0$, on écrit

$$\begin{aligned}
\left\| U\left(x\right) \right\|_{F} &= \left\| x\right\|_{E}\left\| U\left(\frac{x}{\left\| x\right\|_{E}}\right) \right\|_{F} \\
&\leq \sup_{\|x\|=1}\left\| U\left(x\right) \right\|_{F},
\end{aligned}$$

Ou oncore

$$\left\| U\left(x\right) \right\|_{F}\leq \sup_{\|x\|=1}\left\| U\left(x\right) \right\|_{F},$$

Passons ou suprimum sur la poule fermée $\overline{B}\left(0,1\right)$ des deux membres, on obtient

$$\sup_{\|x\|\leq 1,x\neq 0}\left\| U\left(x\right) \right\|_{F}\leq \sup_{\|x\|=1}\left\| U\left(x\right) \right\|_{F},$$

Des deux inégalités précédentes, on tire la relation suivante:

$$\sup_{\|x\|=1} \|U(x)\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \|U(x)\|_F ,$$

D'ou la troisième égalité

$$\|U\| = \sup_{\|x\|\leq 1, x\neq 0} \|U(x)\|_F ,$$

■

1.1.9 Espaces isomorphes

Définition 1.1.7 *[NM]*

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, E et F sont dits isomorphes s'il existe un operateur homéomorphe U défini sur E dans F , c'est à dire:

- *U et U^{-1} sont des operateurs continus.*
- *U est bijectif sur E dans F.*

1.1.10 Espaces isométriques

Définition 1.1.8 *[NM]*

Les espaces E et F sont dite linéairement isométriques, s'il existe une isométrie U appliquant E dans F ,c'est à dire:

$$\|U(x)\|_F = \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E$$

Remarque 1.1.2 [NM]

La notion isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

1.1.11 Normes equivalentes

Définition 1.1.9 *[NM]*

Soit E une espace vectoriel muni de deux normes $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_2)$, ces deux normes sont dite equivalentes, si en peut trouver deux costantes positives α et β telle que:

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 , \forall x \in E,$$

Eutrement dit, les deux normes sont dites equivalentes si et seulement si, l'application identique de E dans F soit un isomorphisme entre les espaces vectorieles normés $(E, \|.\|_1)$ et $(E, \|.\|_2)$.

Théorème 1.1.2 *[NM]*
Dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie, tout les normes sont equivalentes.

1.1.12 Semi-normes

Soit q un application définie sur un espace vectoriel réel E.

Une semi-norme sur un espace vectoriel E est une application de E dans $\mathbb{R}$ satisfaisant seulement aux propriétés:

1. $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ pour tous $x, y \in E$ (inégalité triangulaire)

2. $q(\lambda x) = \lambda q(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \geq 0$ (homogénéité positive)des normes

Proposition 1.1.3 *[NM]*
Soit q une semi-norme sur un espace normé E. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. *q est continue*

2. *q est bornée au voisinage de* 0

3. *q est lipschitzienne (c'est-à-dire $|q(x) - q(y)| \leq \mathit{Cst} \|x - y\|$)*

1.1.13 Prolongement

Un fonction g définie sur un ensemble E est dite prolongement d'une fonction f définie sur un sous ensemble F de E, si

$$f(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in F$$

1.1.14 Théorème de Hahn-Banach

Théorème 1.1.3 *[HB]*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et N une semi-norme définie sur E.Soit f_0 une fonctionnelle linéaire définie sur un sous espace vectoriel F de E, telle que

$$f_0(x) \leq N(x)\ ,\ \forall x \in F.$$

Alors, il existe une fonctionnelle linéaire f, définie sur E tout entier prolongeant la fonctionnelle vérifiant sur l'espace E la condition

$$f(x) \leq N(x)\ \forall x \in E.$$

1.2 Les espaces localements convexes

1.2.1 L'espace vectoriel topologique

On rappelle qu'un espace vectoriel topologique est un espace vectoriel muni d'une topologie rendant continues l'addition et la multiplication par un scalaire.

1.2.2 L'espace localement convexe

Définition 1.2.1 *[QG]*

Un espace vectoriel topologique est dit ***localement convexe*** *si et seulement si tout voisinage de l'origine contient un voisinage convexe.*

En associant à chaque voisinage convexe de l'origine une semi-norme (jauge de Minkowski), on a alors la caractérisation suivante:

Propriété [QG]

Soit E un espace vectoriel topologique. E est localement convexe si et seulement si sa topologie peut être de'finie par une famille de semi-normes (p_α) telles que

$$(\forall \alpha, p_\alpha(x) = 0) \Rightarrow x = 0.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer de plus que cette famille est filtrante, c'est-à-dire que

$$\forall \alpha_1,\ \ldots \alpha_n,\ \exists \beta, p_\beta \geq p_{\alpha_1} + \cdots + p_{\alpha_n}.$$

Une partie A de E est alors ouverte si et seulement si

$$\forall x \in A, \exists \alpha, \delta, B_\alpha(x,\delta) \subset A.$$

• Les espaces vectoriels normés et les espaces pré-Fréchet sont des espaces vectoriels topologiques localement convexes.

• Par contre, l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la distance

$$d(f,g) = \int_0^1 \sqrt{|f-g|}$$

est un espace vectoriel topologique non localement convexe.

1.3 Les espaces L^p

Dans tout ce chapitre on se place dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Tous les concepts présentés se généralisent sans difficulté à un borélien quelconque de $\mathbb{R}^d$.

1.3.1 Préliminaires

Espaces $\mathcal{L}^p(\Omega)$

Soit p un réel de $[1,+\infty[$.

Définition 1.3.1 *[CR]*
$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f$ *mesurables sur* $\Omega, \int_\Omega |f|^p < +\infty\}$

Fonctions égales presque partout

Définition 1.3.2 *[CR]*
Soit f et g deux fonctions mesurables. On dit que f et g sont égales presque partout si $\{x \in \Omega,\ |f(x) \neq g(x)\}$ *est un ensemble négligeable.*

Deux théorèmes importants

Théorème 1.3.1 *[CR]*

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\Omega)$ égales presque par tout. Alors

$$\int_\Omega f = \int_\Omega g$$

Théorème 1.3.2 *[CR]*

Soient $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ telle que $\int_\Omega |f| = 0$. Alors f est nulle presque partout sur Ω.

1.3.2 Espace $L^1(\Omega)$

La relation " $f = g$ pp" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^1(\Omega)$. On peut donc considérer l'espace quotient, qui est l'ensemble des classes d'équivalence.

Définition 1.3.3 *[CR]*

$L^1(\Omega)$ est le quotient de $\mathcal{L}^1(\Omega)$ par la relation d'équivalence " égalité presque partout dans Ω ".

Autrement dit,

$$L^1(\Omega) = \{f \text{ définie sur } \Omega \text{ à un ensemble négligeable près }; \int_\Omega |f(x)|dx < +\infty\}$$

Théorème 1.3.3 *[CR]*

Muni de la norme définie par

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|dx,$$

l'espace vectoriel $L^1(\Omega)$ est un espace de Banach.

1.3.3 Espace $L^2(\Omega)$

De même que pour $L^1(\Omega)$, on quotiente $\mathcal{L}^2(\Omega)$ par la relation d'équivalence "égalité presque partout"

Définition 1.3.4 *[CR]*

$L^2(\Omega)$ est le quotient de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ par la relation d'équivalence "égalité presque partout dans Ω ".

Autrement dit,

$$L^2(\Omega) = \{f \text{ définie sur } \Omega \text{ à un ensemble négligeable près} ;\ \int_\Omega |f(x)|dx < +\infty\}$$

Théorème 1.3.4 *[CR]*

L'application

$$f \in L^2(\Omega),\ g \in L^2(\Omega) \mapsto (f,g)_{L^2} = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

est un produit scalaire.

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de ce produit scalaire, .

La norme induite est

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(f,f)_{L^2}} = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 dx}$$

Remarque 1.3.1 *[CR]*

Dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$,l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :

$$\forall f \in L^2(\Omega), \forall g \in L^2(\Omega), |\int_\Omega f(x)g(x)dx| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}$$

ce qui implique notamment

$$\forall f \in L^2(\Omega), \forall g \in L^2(\Omega), \|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}$$

1.3.4 Espaces $L^p(\Omega)$ et $L^p_{loc}(\Omega)$

On généralise ici les espaces précédemment présentés.

Soit p un réel, $p \geq 1$.

Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.3.5 *[CR]*

L'espace vectoriel $L^p(\Omega)$ est le quotient de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ par la relation d'équivalence "égalité presque partout dans Ω "

Autrement dit, on a

$$L^p(\Omega) = \{f, \text{définie } \Omega \text{ a un ensemble négligeable prés telles que: } \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty\}$$

Théorème 1.3.5 *[CR]*

l'espace vectoriel $L^p(\Omega)$ muni de la norme définie par

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f(x)|^p dx)^{1/p}$$

est un espace de Banach.

Théorème 1.3.6 *[CR]*

(Inégalité de Höder). Soit $p \in \mathbb{R}, 1 < p < +\infty$.

Soit $q \in]1, \infty[$ tel que $1/p + 1/q = 1$.

Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Remarque 1.3.2 *[CR]*

Pour $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème 1.3.7 *[CR]*

On suppose Ω borné. Soit $q > p \geq 1$. Alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$

Espaces $L^p_{loc}(\Omega)$

Définition 1.3.6 *[CR]*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ On dit que f est localement intégrable sur Ω si, pour tout compact K inclus dans Ω, la fonction f est intégrable sur $\Bbbk$. On note

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f; f \in L^1(K) \textit{ pour tout compact } K \subset \Omega\}$$

l'espace vectoriel des fontions localement intégrables.

De même,

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f; f \in L^p(K) \textit{ pour tout compact } K \subset \Omega\}$$

Remarque 1.3.3 *[CR]*

On a bien sur $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$

Proposition 1.3.1 *[CR]*

Soit $q > p \geq 1$. Alors $L^q_{loc}(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$ .Soit $p \geq 1$. Alors $L^p(\mathbb{R}^d) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

Définition 1.3.7 [CR] *(Convergence dans $L^p_{loc}(I)$).*

Soit f_n une suite de $L^p_{loc}(\Omega)$ et $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ .On dit que f_n converge vers f dans $L^p_{loc}(\Omega)$ si, pour tout compact $K \subset \Omega$, la suite $f_{n|K}$ converge vers $f_{|K}$ dans $L^p(K)$

1.3.5 Espace $L^\infty(\Omega)$

Définition 1.3.8 [CR]

On dit qu'une fonction f est essentiellement bornée sur Ω si il existe un réel positif M tel que

$$\mu(\{x \in \Omega; |f(x)| \geq M\}) = 0.$$

Remarque 1.3.4 [CR]

En dehors d'un ensemble de mesure nulle, on a $|f(x)| < M$.

Définition 1.3.9 [CR]

On note $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions essentiellement bornées sur Ω.

Encore une fois, pour avoir un espace de Banach on va devoir quotienter $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$

Définition 1.3.10 [CR]

$L^\infty(\Omega)$ est le quotient de $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ par la relation d'équivalence " égalité presque partout"

Autrement dit,

$L^\infty(\Omega)$ ={ f définie sur Ω à un ensemble négligeable près ;f est essentiellement bornée}

Théorème 1.3.8 [CR]

l'espace vectoriel $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme définie par

$$\|f\|_{L\infty(\Omega)} = \inf\{M \geq 0; \mu(\{x \in \Omega; |f(x)| \geq M\}) = 0\},$$

est un espace de Banach.

Théorème 1.3.9 [CR]

Pour $f \in L^\infty(\Omega)$,on a:

pour presque tout $x \in \Omega, |f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ et $\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ est le plus petit réel satisfaisant cette propriété.

Théorème 1.3.10 *[CR]*

Si f est continue sur Ω et essentiellement bornée, alors pour tout $x \in \Omega, |f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$

Remarque 1.3.5 *[CR]*

C'est le "pour tout" qui est important ici.

Théorème 1.3.11 *[CR]*

Si $f \in L^1(\Omega)$ et $g \in L^\infty(\Omega)$,alors le produit fg est dans $L^1(\Omega)$ et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}\|g\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Remarque 1.3.6 *[CR]*

Ceci étend l'inégalité de Hölder au cas $p = 1, q = +\infty$

Chapitre 2

Les espaces réflexifs

2.1 Dualité est la topologie faible

2.1.1 Espaces duals

Définition 2.1.1 *[DF]*

Si E est un espace vectoriel réel ou complexe, on appelle ***dual algébrique*** *de E et l'on note E^* l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires (continues ou discontinues) sur E.*

On appelle ***dual topologique*** *et l'on note E' le sous-espace de E^* constitué des formes linéaires continues sur E.*

• Noter que E' inclus dans E^*

• Noter aussi que E' est normé (espace d'applications linéaires) et complet, puisque $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets.

• Noter aussi qu'une forme linéaire f appartient à E' si et seulement si sa norme $\|f\|$ est finie.

Théorème 2.1.1 *[DF]*

Soit $x \in E$. Alors:

$$\|x\| = \sup\{|f(x)|/f \in E', \|f\| \leq 1\}$$

Le **bidual topologique** E'' de E est le dual topologique de E' On a alors:

Corollaire 2.1.1 [DF]

L'application $x \to x''$ définie par $x''(f) = f(x)$ pour tout $f \in E'$ est une isométrie de E dans E'' Cette application est dite "l'injection canonique" de E dans E''

2.1.2 Topologie faible et topologie faible*

Topologie faible

Soit E un espace de Banach et soit $f \in E'$.On désigne par $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi_f(x) =< f, x >$. Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f\in E'}$ d'application de E dans $\mathbb{R}$

Définition 2.1.2 [HB]

la topologie faible $\sigma(E, E')$, sur E est la toplogie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$

Proposition 2.1.1 [HB]

lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coincident.

En particulier une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.

Théorème 2.1.2 [HB]

Soit $C \subset E$ convexe .Alors C est faiblement fermé pour $\sigma(E, E')$ si et seulement s'il est fortement fermé.

Topologie faible*

Définition 2.1.3 [HB]

la topologie faible* désigne aussi par $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine sur E'rendant continues toutes les application $(\varphi_x)_{x\in E}$

Théorème 2.1.3 ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)*** [HB]

Soient E un espace de Banach et E^* son dual.

Alors la boule unité $B = \{f \in E^*/||f||_{E^*} \leq 1\}$ est compacte pour la topologie faible*.

2.2 Espaces réflexifs

Soit E un espace de Banach. On voit facilement que E s'identifie à un sous-espace vectoriel de E^{**} grâce à l'injection

$$\mathrm{j} : \mathrm{x} \in E \to j(x) \in E^{**} \text{où} < \mathrm{j(x), f} >=< \mathrm{f, x} > \text{pour tout f} \in E^{*}$$

qui est une isométrie d'espace vectoriel normé.

Définition 2.2.1 *[HB]*
*On dit que E est **réflexif** si l'injection canonique de E dans E'' est surjective.*

Il est clair que tout espace de dimension finie est réflexif.

Autrement dit, dire que E est réflexif revient à dire qu'on peut identifier$E$" à E.

Définition 2.2.2 *[HB]*
Soit E un espace de Banach .On dit que E est réflexif s'il est le dual de son dual, i.e :si l'application j d'efinie précédemment est surjective.

Cette définition implique que tout espace normé réflexif est de Banach, puisque E est isomorpbe à E".

2.3 Exemples sur les espaces réflexifes et non réflexifs

Exemples[WK]

-Les espaces de **Montel** (Espace de Montel un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, tonnelé et dont tout fermé borné est compact) sont réflixifs.

-Evidemment tout espace de Hilbert est réfexif (ceci découle du théorème de Riesz qui permet d'identifier un espace de Hilbert à son dual topologique).

-Pour tout $1 < p < \infty$. les espaces ℓ^p , L^p ,$W^{1,p}(\Omega)$ sont réflexifs

-Les espaces de Banach uniformément convexe (voir théorème de (**Milman-Pettis**)).sont réflexifs

-Par contre ℓ^1,ℓ^∞,L^1,L^∞,C^0,$W^{1,1}$,$W^{1,\infty}$ les espaces de mesures ne sont pas réflexifs.

-L'espace $C([0,1])$ n'est pas réflexif.

Pour un espace réflexif, on a donc $\sigma(E, E^*) = \sigma(E^{**}, E^*)$ et la boule unité est faiblement compacte. Il s'agit en fait d'une caractérisation des espaces réflexifs.

L'importance fondamentale de la réflexivité provient du résultat de compacité énoncé dans le théorème de **Kakutani** plus bas. Avant d'énoncer et de démontrer ce résultat important nous aurons besoin de deux lemmes:

Lemme 2.3.1 ***(Helly)*** *[HB]*

Soit E un espace de Banach. On se donne $f_1, ..., f_n$ dans E^* et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des réels. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in B_E$ tel que:

$$\forall i = 1, ..., n, |f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon$$

(ii) pour tout $\beta_1, ..., \beta_n$ réels, on a

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|$$

Démonstration. [HB]

Supposons d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in B_E$ tel que

$$\forall i = 1, \ldots, n, \ \ f_i(x_\varepsilon) - \alpha_j| < \varepsilon.$$

Soient $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des réels quelconques. On a

$$|\sum_{i=1}^{n} \beta_j \alpha_j| \leq ||\sum_{i=1}^{n} \beta_j f_i(x_\varepsilon)|| + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\beta_j| \leq ||\sum_{i=1}^{n} \beta_j f_i|| + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |\beta_j|$$

d'où l'on déduit (ii) en faisant tendre $\varepsilon \to 0$.

On établit ensuite la réciproque par contraposition On définit $F = (f_1, \ .., f_n)$ .Par définition, $\overline{F(B_E)}$ est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.

D'après le théorème de **Hahn-Banach**, si $\alpha = (\alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n) \notin \overline{F(B_E)}$, il existe une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ qui sépare strictement α et $F(B_E)$, autrement dit il existe $\beta_1, \ldots, \beta_n$ et γ tels que:

$$\forall x \in B_E, \sum_{i=1}^{n} \beta_j f_i(x) < \gamma < \sum_{i=1}^{n} \beta_j \alpha_j$$

ce qui implique en particulier que

$$||\sum_{i=1}^{n}\beta_j f_i(x)|| < |\sum_{i=1}^{n}\beta_j\alpha_j|$$

ce qui contredit (ii). ∎

Lemme 2.3.2 ***(Goldstine)***[HB]

Soit E un espace de Banach .On définit $j : x \in E \to j(x) \in E^{**}$ *où* $< j(x), f >=< f, x >$ *pour tout* $f \in E^*$ *Alors :*

$$j(B_E) \text{ est dense dans } B_{E^{**}} \text{ pour la topologie faible}^* \ \sigma(E^{**}, E^*).$$

Preuve. [HB]

Soit $\eta \in B_{E^{**}}$ et V un voisinage de η pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$.

Il s'agit demontrer que $V \cap (B_E) \neq \emptyset$.

Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe $\varepsilon > 0, f_1, \ldots, f_n$dans E^*telle que $V = \{\xi \in E^{**}/|(\xi - \eta)(f_i)| < \varepsilon$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ $\}$.

Si on pose $\alpha = \eta(f_i)$, on a

$$\forall\beta_1,\ ..,\beta_n \in \mathbb{R},\ |\sum_{i=1}^{n}\beta_j\alpha_j| = |\eta(\sum_{i=1}^{n}\beta_j f_i)| \leq ||\sum_{i=1}^{n}\beta_j f_i||$$

D'après le lemme d'**Helly**, il existe alors $x_\varepsilon \in B_E$ tel que

$$\forall \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n},\ |f_i(x_\varepsilon) - \alpha_{i^{1<\varepsilon}}$$

ce qui signifie exactement que $j(x_\varepsilon) \in$ V, et donc que V $\cap\, j(B_E) \neq \emptyset$. ∎

Le résultat suivant énonce une caractérisation important des espaces réflexifs.

Une condition suffisante pour qu'un espace de Banach soit réflexif est qu'il soit uniformément convexe

Théorème 2.3.1 ***(Kakutani)***[HB]

Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si sa boule d'unité est compacte pour $\sigma(E, E^*)$

Démonstration.

Supposons d'abord que E est réflexif, de sorte que l'isométrie

$j : x \in E^* \to j(x) \in E^{**}$ où $\langle j(x), f\rangle = \langle x, f\rangle$ pour tout $f \in E^*$,est surjective: $j(B_E) = B_{E^{**}}$.

D'après le théorème de **(Banach-Alaoglu-bourbaki)**, $B_{E^{**}}$est compact pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$.

Comme j^{-1} est une isométrie, pour tout $f \in E^*, f \circ j^{-1}$ est continue pour $\sigma(E^{**}, E^*)$

Cela implique que j^{-1} est continue de $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ vers $(E, \sigma(E, E^*))$.

La boule B_E est donc faiblement compacte dans E.

Réciproquement, si B_E est faiblement compacte, comme j est une isométrie de E sur E^{**}, elle est continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ dans $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^{***}))$ d'après le (Corollaire 3.2.2).

Comme $\sigma(E^{**}, E^*)$ est moins fine que $\sigma(E^{**}, E^{***}), j$ est aussi continue de $(E, \sigma(E, E^*))$ dans $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$

Cela implique quej (B_E) est compact pour $\sigma(E^{**}, E^*)$ .Le lemme de Goldstine montre alors que $B_{E^{**}} = B_E$, et donc $E^{**} = E$. ■

Ce théorème qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace de Banach soit réflexif, est en fait utilisé pour prouver que la boule unité fermée est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$ qui est toujours un fait loin d'être trivial.

Définition 2.3.1 *[LSR]*

Un space vectoriel normé E est dit uniformément convexe si on a la propriété suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1 \ et \ \frac{1}{2}||x + y|| > 1 - \delta) \Rightarrow ||x - y|| \leq \varepsilon$$

Théorème 2.3.2 ***(Milman-Pettis)*** *[LSR]*

Tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

Preuve.

On doit montrer que $j(E) = E^{**}$,ou de faąon équivalente que $j(B_E) = B_{E^{**}}$.Comme $j(B_E)$ est fermée,Il suffit par homogénéité de montrer que $j(B_E)$ est dense (pour la topologie forte) dans la sphère $S = \{\eta \in E^{**}/||\eta||_{E^{**}} = 1\}$.

On se donne alors $\eta \in S$ et $\varepsilon > 0$,et on va montrer qu'il existe $x \in B_E$ telque

$$||j(x) - \eta|| \leq \varepsilon.$$

Comme E est unifomément convexe, il existe $\delta > 0$ telque

$$\forall x, y \in B_E,\ ||x-y|| > \varepsilon \Rightarrow ||x+y|| \rightarrow 2(1-\delta)$$

On choisit alors $f \in E^*$ telle que

$$||f||_E^* = 1 \text{ et } \eta(f) \geq 1 - \frac{\delta}{2}$$

D'après le lemme de Goldstine, $j(B_E)$ est dense dans $B_{E^{**}}$ existe donc $x \in B_E$ telle que

$$|\eta(f) - f(x)| < \frac{\delta}{2}$$

- Si $||j(x) - \eta|| \leq \varepsilon$, on a la propriété voulue.

- Si $\|j(x) - \eta\| > \varepsilon$,comme $E^{**} \backslash B_{E^{**}}(j(x), \varepsilon)$ est ouvert pour la topologie $\sigma(E^{**}, E^*)$, il résulte du lemme de **Goldstine** qu'il existe $y \in B_E$ tel que

$$||j(y) - j(x)|| = ||x-y|| > \varepsilon \ et \ ||\eta(f) - f(x)| < \frac{\delta}{2}.$$

puisque

$$\frac{1}{2}||x+y|| \geq (1-\delta)$$

On a alors

$$1 - \frac{\delta}{2} \leq \eta(f) < \frac{1}{2} f(x+y) + \frac{\delta}{2} \leq \frac{1}{2}||x+y|| + \frac{\delta}{2}$$

ce qui aboutit à une contradiction ■

Il est surprenant qu'une propriété de nature géométrique (uniforme convexité) entraîne une propriété de nature topologique (réflexivité). L'uniforme convexité est souvent un outil commode pour prouver qu'un espace est réflexif [mais cette methode ne marche pas toujours: il existe des espaces réflexifs qui ne possèdent aucune norme équivalente uniformément convexe].

Proposition 2.3.1 *[HB]*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.Si $p \in \,]1, \infty[\,$, $L^p(\Omega)$ est uniformément convexe, donc réflexif.

Démonstration.

On pose

$$h(x) = (1 + x^{\frac{1}{p}})^p + |1 - x^{\frac{1}{p}}|^p$$

On a alors

$$\begin{aligned} h'(x) &= (1+x^{\frac{-1}{p}})^{p-1} + |1-x^{\frac{-1}{p}}|^{p-2}(1-x^{\frac{-1}{p}}) \\ h"(x) &= \frac{p-1}{p} x^{-1-\frac{1}{p}}[|1-x^{\frac{-1}{p}}|^{p-2} - (1+x^{\frac{-1}{p}})^{p-2}] \end{aligned}$$

de sorte que p est convexe sur $\mathbb{R}^+$ si $p \leq 2$ et concave si $p \geq 2$.

Si $p \geq 2$, l'inégalité de Jensen donne

$$h(\frac{\int_\Omega v^p dx}{\int_\Omega u^p dx}) \geq \frac{\int u^p h((\frac{v}{u})^p) dx}{\int u^p dx}$$

Soit encore

$$||u+v||_p^p + ||u-v||_p^p \leq (||u||_p + ||v||_p)^p + |||u||_p - ||v||_p|^p$$

en particulier, si $||u||_p = ||v||_p = 1$ et $||u-v||_p > 2\varepsilon$,

$$||\frac{1}{2}(u+v)||_p \leq (1-\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}}$$

Donc $L^p(\Omega)$ est uniformément converxe

Si $p \leq 2$,

$$||u+v||_p^p + ||u-v||_p^p \geq (||u||_p + ||v||_p)^p + |||u||_p - ||v||_p|^p$$

En particulier, Si $||\tilde{u}||_p = ||\tilde{v}||_p = 1$

$$(||\frac{1}{2}(\tilde{u}+\tilde{v})||_p + ||\frac{1}{2}(\tilde{u}-\tilde{v})||_p)^p + |||\frac{1}{2}(\tilde{u}+\tilde{v})||_p + ||\frac{1}{2}(\tilde{u}-\tilde{v})||_p|^p \leq 2$$

Donc $L^p(\Omega)$ est uniformément converxe ■

Exemple 2.3.1 (Un espace de Banach non réflexif)

Nous venons de voir que l'espace de Banach $\ell^p, p \in]1, +\infty[$ est réflexif.

Nous allons montrer que ℓ^1 ne l'est pas .Pour cela nous allons montrer que le dual de ℓ^1 est isométrique à ℓ^∞ (espace des suites réelles (ou complexes) bornées muni de la norme

$$||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|)$$

Mais que le dual de ℓ^∞ n'est pas ℓ^1

i) Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de ℓ^∞ Considérons l'application linéaire $\Phi_x : \ell^1 \to \mathbb{R}$ définie en $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\Phi_x(y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n.$$

La série converge bien puisque la suite x_n est bornée et la suite y_n sommable. De façon évidente on a:

$$|\Phi_x(y)| \leq ||x||_\infty ||y||_1$$

Qui montre bien que Φ_x est une forme linéaire continue de norme inférieure ou égale à $||x||_\infty$.

On a donc une application linéaire $\Phi : x \in \ell^\infty \to \Phi_x \in (\ell^1)'$ vérifiant

$$|||\Phi_x||| \leq ||x||_\infty;$$

Φ est injective car si $\Phi_x = 0$, alors en évaluant Φ_x sur les vecteurs

$$e^k = (\delta_n^k)_{k\in\mathbb{N}}, k \in \mathbb{N}$$

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n = 0$. Reste à montrer qu'elle vérifie $|||\Phi_x||| \geq ||x||_\infty$ et qu'elle est surjective.

Cette dernière propriété s'établit de manière analogue à ce qui a été fait pour l'espace $\ell^p, p > 1$; elle sera laissée au lecteur. Reprenons la suite $(e^k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec

$$e^k = (\delta_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$$

.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |x_k| &= |\Phi_x(e^k)| \\ &\leq |||\Phi_x|||\ ||e^k||_1 \\ &\leq |||\Phi_x|||. \end{aligned}$$

D'où

$$||x||_\infty \leq |||\Phi_x|||.$$

On a donc montré que le dual de ℓ^1 est isométrique à ℓ^∞

ii) Soit V le sous-espace de ℓ^∞ dont les éléments sont les suites $x = (x_n)$ qui admettent une limite quand n tend vers $+\infty$

Soit $\theta : V \to \mathbb{R}$ la forme linéaire non nulle définie par:

$$\theta(x) = \lim_{n \to +\infty} x_n.$$

On a:

$$|\theta(x)| \leq ||x||_\infty \text{ et} |\ \theta(\delta)| = 1$$

Où δ est l'élément de ℓ^∞ dont tous les termes sont égaux à 1.

Il en résulte que θ est continue de norme égale à 1. D'après le théorème de Hahn-Banach .θ se prolonge en une forme linéaire continue $\overline{\theta} : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ telle que $|||\overline{\theta}||| = |||\theta|||$.

Soit e^k l'élément

$$e^k = (e_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$$

Avec $e_n^k = \delta_n^k$; il appartient à tous les espaces ℓ^1, ℓ^∞ et V.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a:

$$\overline{\theta}(e^k) = \theta(e^k) = \lim_{n \to +\infty} e_n^k = 0.$$

Soit $\Psi : \ell^1 \to (\ell^1)''$ l'application évaluation qui est une injection isométrique de ℓ^1 dans son bidual $(\ell^1)''$.

D'après i), $(\ell^1)'$ est isométrique à ℓ^∞, via l'application $\Phi : \ell^\infty \to (\ell^1)'$.

Nous allons montrer que $\overline{\theta}$ ne peut pas être dans l'image de Ψ.

Pour cela il suffit de montrer que, pour tout $x \in \ell^1$ non nul ,Ψ_x est non nulle sur au moins l'un des $\Phi(e^k)$ .Ce qui établira que $\overline{\theta}$ n'est pas de la forme Ψ_x avec $x \in \ell^1$

Comme $(e^k)_k$ est une base de ℓ^1,pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $\xi_k : \ell^1 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\xi_k(e^j) = \delta_k^j$$

est une forme linéaire continue de norme 1.On a clairement

$$\xi_k = \Phi(e^k)$$

et donc

$$\Psi_{e^j}(\xi_k) = \delta_n^j$$

.

Soit $x \in \ell^1$ non nul; alors

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_k e^k$$

où (a_k) est une suite sommable avec un a_{k_0} non nul. Alors

$$\Psi_x(\xi_{k_0}) = a_{k_0} \neq 0.$$

Ce qui termine la démonstration.

Proposition 2.3.2 *[HB]*

Soit E un espace de Banach réflexif et soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors M est réflexif. (M muni de la norme induite par E)

Démonstration. [HB]

Notons d'abord que sur M sont définis deux topologies faibles:

-La topologie $\sigma(M, M')$.

-La trace sur M de la topologie $\sigma(E, E')$.

On vèrifie aissément que ces deux topologie coincide. (en jouant avec des restrictions et des prolongements des formes linéaines)

Il faut montrer (d'après le théorème de **(Kakutani)**) que B_M est compact pour la topologie $\sigma(M, M')$.

Or B_M est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$ et M est fermé pour la topologie $\sigma(E, E')$ **(théorème 2.1.2).**

Par suite B_E est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$,et donc aussi pour la topologie $\sigma(M, M')$ ■

Corollaire 2.3.1 *[HB]*

Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si E' est réflexifs.

Démonstration. [HB]

E réflexif $\Longrightarrow$ E' réflexif.

On sait (théorème de **(Banach-Alaoglu-bourbaki)**) que B_E est compact pour $\sigma(E, E')$.

D'autre parte on a $\sigma(E, E') = \sigma(E', E'')$ puisque E est réflexif.

Par conséquent B'_E est Compact pour $\sigma(E', E'')$, et donc E' est réflexif (théorème de **(Kakutani)**).

E' réflexif $\Rightarrow$ E réflexif.

On sait (d'après l'étape précédente) que E" est réflexif.

Comme $J(E)$ est un sous-espace fermé de E" il en résulte $J(E)$ est réflexif.

Par conséquent E est réflexif. ■

Corollaire 2.3.2 *[HB]*

Soit E une espace de Banach réflexif.Soit $K \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné. Alors K est compacte pour la topologie $\sigma(E, E')$

Démonstration.

K est fermé pour la topologie $\sigma(E, E')$ **(théorème 2.1.2)**.

D'autre parte il existe une constante m telle que $K \subset mB_E$ est compact por $\sigma(E, E')$ (**théorème de (Kakutani)**). ■

Corollaire 2.3.3 *[HB]*

Soit E une espace de Banach réflexif.$A \subset E$ une convexe fermé, non vide et

$$\varphi : A \to]-\infty, +\infty[$$

une fonction convexe s.c.i $\varphi \neq +\infty$ telle que:: $\lim\limits_{\substack{x \in A \\ |x|| \to \infty}} \varphi(x) = +\infty$(*aucune hypothèse si $\mathcal{A}$ est borné*)

Alors φ atteint son minimum sur A, i,e :il existe $x_0 \in A$ tel que $\varphi(x_0) = Min_A \varphi$

Démonstration.

Soit $a \in A$ tel que $\lambda_0 = \varphi < +\infty$. on considere l'ensemble

$$\tilde{A} = \{x \in A; \varphi(x) \leq \lambda - 0\}$$

$\tilde{A}$ est un convexe fermé borné (graçe à $\lim_{x \in A, ||x|| \to \infty} \varphi(x) = +\infty$) , et donc compact pour la topologie $\sigma(E, E')$.

D'autre part φ est s.c.i pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Par conséquent φ atteint son minimum sur $\tilde{A}$:il existe $x_0 \in \tilde{A}$ tel que:

$$\varphi(x_0) \leq \varphi(x) \ \forall x \in \tilde{A}$$

Si $x \in A \backslash \tilde{A}$ on a $\varphi(x_0) \leq \varphi(a) \leq \varphi(x)$ et donc, en fait

$$\varphi(x_0) \leq \varphi(x) \ \forall x \in A$$

■

Le **corollaire 2.3.3** explique le rôle essentiel joué par les espaces réflexifs et les fonctions convexes en calcul des variations, contrôle optimal etc.

Théorème 2.3.3 *[HB]*
Soit E un espace de Banach réflexif et soit (x_n) une suite bornée dans E. Alors il existe une sous-suite extraite (x_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Démonstration.
Soit M_0 l'espace vectoriel engendre par (x_n) et soit $M = \overline{M}_0 M$ est un espace séparable

De plus M est réflexif d'après la **(proposition 2.3.2)**.

Il en resulte que B_M est un ensemble métrisable et compact pour la topologie $\sigma(M, M')$.

En effet, M" est séparable (corollaire 2.1.9) et par suite $B'_M = B_M$ est métrisable pour $\sigma(M'', M') = \sigma(M, M')$ grâce au .On peut alors extraite une sous-suite (x_n) aui converge pour la topologie $\sigma(M, M')$.

On en déduit que (x_n) converge aussi pour la topologie $\sigma(E, E')$ (par restriction à M des formes linéaire continues sur E). ■

Théorème 2.3.4 ***(Eberlein-Šmulian)*** *[HB]*
Soit E un espace de Banach tel que toute suite bornée (x_n) possède une sous-suite extraite (x_{n_k}) convergente pour la topologie $\sigma(E, E')$ .Alors E est réflexif.

Démonstration. [La démonstration est Délicate]
Voir par exemple Holmes, Yosida, Dunford-Schartz, Diestel. Afin de bien préciser l'intérêt du théorème **(Eberlein-Šmulian)** rappelent que :

i) un espace topologique dans lequel toute suite possède une sous-suite convergente n'est pas nécessairement compact.

$ii)$ dans un espace topologique compact il peut exister des suites ne possèdent aucune sous- suites convergente.

$iii)$ d ans un espace métrique

$$\text{(compact)} \Leftrightarrow \text{(toute suite possède une sous suite convergente)}$$

■

Théorème 2.3.5 *[HB]*

Soit E un espace de Banach uniformément convexe. Soit (x_n) une suite dans E telle que $(x_n) \to x$ pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ et

$$\limsup ||x_n|| \leq ||x||$$

Alors $x_n \to x$ fortement

Démonstration. $[HB]$

On peut suppose que $x \neq 0$ (sinon la conclusion est evidente). Soit

$$\lambda_n = \max\{||x_n||,\ ||x||\}$$

de sorte que $\lambda_n \to ||x||$. On pose

$$y_n = (\lambda_n)^{-1} x_n \text{ et } y = (||x||)^{-1} x$$

Alors $y_n \to \|y\|$ pour $\sigma(E, E')$. On en deduit que $\|y\| \leq \liminf \left\|\frac{y_n+y}{2}\right\|$

D'autre part $\|y\| = 1, \|y_n\| \leq 1$ et donc en fait $\left\|\frac{y_n+y}{2}\right\| \to 1$.

Il résulte de l'uniforme convexité que 11y$_n$ -yll $\to 0$.

D'où $x_n \to x$ fortement. ■

Chapitre 3

Applications sur les espaces réflexifs

3.1 Minimisation de critère

On va s'intéresser a l'existence de solution de la minimisation du critère

$$J(u) = ||g - Hu||^2 + ||\nabla u||^2$$

c'est-à-dire

$$J(u) = \int_\Omega [(g - Hu)(x)]^2 dx + \int_\Omega |(\nabla u)(x)|^2 dx$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sous-ensemble ouvert borné

$u : \Omega \to \mathbb{R}$

$x \to u(x)$

Problème modèle[LBF]

$$\inf_{u \in X} J(u)$$

avec

$$J(u) = \int_\Omega [(g - Hu)(x)]^2 dx + \int_\Omega |(\nabla u)(x)|^2 dx$$

Question:

- Existe-t-il un point minimum?
- Comment on peut utiliser toutes ces topologie?

-Si X est un espace réflexif et si une suite (x_n) est bornée, alors on peut extraire une sous-suite convergente pour la topologie faible.

-Si une suite bornée dans le dual X', alors on peut en extraire une sous-suite convergente pour la topologie faible$*$.

Ces notion servent pour la démonstration de l'existence d'une solution au problème

$$\inf_{u \in X} F(u)$$

Soit X une espace de Banach et $F : X \to \mathbb{R}$.

- F est convexe si

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y) \forall x, y \in X \text{ et } \lambda \in [0,1]$$

- F est s.c.i si

$$\liminf_{(x_n) \to x} F(x_n) \geq F(x)$$

- F est coercive si

$$\lim_{||x|| \to x} F(x) = +\infty$$

- Utilisé de ces définitions?

Définir l'existence d'un minimum

-Si F est sci et coercive dans un espace réflexif alors F admet un minimum.

3.2 Méthode directe du calcul des variations

On considère le problème de minimisation

$$\inf_{u \in X} F(u)$$

- Considérer une suite minimisante $u_n \in X$, c'est-à-dire suite satisfaisant

$$\lim_{n \to \infty} F(u_n) = \inf_{u \in X} F(u)$$

- Si F est coercive, on obtient une borne uniforme sur la suite $u_n : |U_n| \leq K$
- Si X est réflexif alors on en déduit l'éxistence d'une sous suite u_{n_j} et $u_0 \in X$ telle que u_{n_j} converge faiblement vers u_0
- Si F est sci on en déduit

$$\inf_{u \in X} F(u) = \liminf_{(x_n) \to x} F(x_n) \geq F(x)$$

ce qui implique que $F(u_0) = \min\limits_{u \in X} F(u)$

• Cas où F est une fonctionnelle intégrale

soit f : $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on considére la fonctionnelle

$$F(u) = \int_\Omega f(x,\; u(x), Du(x))dx$$

Si f est sci et coercive, F l'est aussi

On en déduit l'existence d'un minimum dans $H^1 = W^{1,2}$ pour le critète

$$\inf_{u \in X} J(u)$$

avec :

$$J(u) = \int_\Omega [(g - Hu)(x)]^2 dx + \int_\Omega |(\nabla Hu)(x)|^2 dx$$

Conclusion

L'analyse fonctionnelle est un thème central dans beaucoup de branches des mathématiques : l'equations aux dérivées partielles, analyse complexe, analyse globale sur les variétés, théorie des représentations des groupes, géométrie differentielle Son objet est l'étude, sous divers aspects, et en particulier l'aspect topologique, des espaces fonctionnels $E = F(X; \mathbb{k})$ et de leurs opérateurs ($\mathbb{k}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). C'est ce qu'on se propose d'étudier de façon élémentaire dans ce cours.

Dans les espaces de Banach, une grande partie de l'étude implique le dual topologique : l'espace de toutes les formes linéaires continues. Comme en algèbre linéaire, le bidual (le dual du dual) n'est pas toujours isomorphe à l'espace original, mais il y a toujours un morphisme injectif naturel d'un espace dans son bidual.

Il est surprenant qu'une propriété de nature géométrique (uniforme convexité) entraîne une propriété de nature topologique (réflexivité). L'uniforme convexité est souvent un outil commode pour prouver qu'un espace est réflexif [mais cette methode ne marche pas toujours: il existe des espaces réflexifs qui ne possèdent aucune norme équivalente uniformément convexe].

Bibliographie

[1] **Cours**

[NM] **M.NADIR**

Université de M'sila, M1 (Espaces de Banach) Analyse fonctionnelle ,page $1 <-> 8$.

[DF] : **D.Fyel**

Université d'Evry-Val d'Essonne, M1, année 2006-07 Résumé d'analyse fonctionnelle élémentaire, page 5.

[LSR] : **Laure.Saint-Raymond**

Université Paris VI and DMA école Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm 75230 Paris ,France, pages $21 - 22$.

[QG] **Quentin Griette**

Université de Lyon M1 Espaces vectoriels topologiques

[LBF] : **LaureBlanc-Féraud**

DR CNRS Laboratoire I3 **SINRIA** Sophia Antipolis Restauration d'images par approche variationnelle et **EDP**, pages $63 <-> 67$.

Livres:

[AM] **A. Michel**

(Introduction) Dictionnaire des mathématiques algèbre, analyse, géométrie, Paris 1997.

[BH] **H.Brézis**

Analyse fonctionnelle: théorie et applications, Masson $2^{éme}$ tirage 1987, pages $35 < - > 52$.

Liens

[CR] **Cermics**

http://cermics.enpc.fr/~ananthaa/Espaceslp.pdf

[Wk] **Wikipedia**

https://fr.wikipedia.org/wiki/Espace_réflexifs