Université de M'sila Mohamed Boudiaf
Faculté des Mathématiques et d'Informatiques

Departement des Mathématiques

Mémoire: Troisième Année L.M.D

THÈME

kkkkkkkkkk

Variables

Rédige Par:

1)Nom Prenom

2)Nom Prenom

3)Nom Prenom

Dirigé par:

M^r**Mihoubi Farid**

Année: **2012/2013**

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur ***T. eacher*** *pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur ***T. eacher,*** *Professeur à universite de xx. pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury .*

Je remercie vivement Messieurs ***T. eacher,*** *Professeur à univ. m'sila et* ***T. eacher,*** *Maître de Conférences à univ.*

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mon frère ***jj*** *pour leur soutient tout au long de mes études.*

Table des matières

Introduction

Le présent mémoire s'intéresse au problème de Stefan pour les problèmes aux limites de l'équation de la chaleur, qui se pose, par exemple, dans l'étude de la fonte de la glace adjacente à l'eau chauffée.

L'existence de la solution selon le théorème générale a été prouvée d'abord il ya seulement vingt ans en relation avec le problème de Stefan en un dimension par Rubinstein [9] .

Depuis, divers travaux sur le problème Stefan ont été publiés par de nombreux auteurs dont Friedman [10], Evans[11], Douglas,J.[5] ,........etc.

Parmi leurs contributions, nous nous référons aux théorèmes d'existence due à Kyner [6], Frindman [4] qui indiquent l'existence de solutions du problème soumis aux conditions de Dirichlet ou Neumann imposées à la limite de l'eau chauffée, sous l'hypothèse qu'au moment initial, il existe une certaine quantité d'eau. En effet, l'absence d'eau au moment initial invoque une certaine singularité ou difficulté du problème du point de vue mathématique, qui est assez doux pour le cas de la condition aux limites de Neumann, mais il est assez difficile à manipuler pour le cas de la condition de frontière de Dirichlet.

Il existe une grande variété de problèmes de Stefan à frontières libres (parfois appelés problèmes frontière libres) impliquant une équation parabolique. Historiquement, le nom du problème de Stefan est principalement utilisé pour désigner un autre type de problème de frontière libre qui se pose par exemple dans des problèmes liés à la fusion (ou à la solidification) des glissades et à la dynamique des gaz.

Le problème de Stefan est lié à plusieurs applications

L'objectif du présent mémoire est d'étudier le problème de Stefan avec ses différents aspects, nous essayons de détailler la démonstration d'un théorème d'existence pour le problème de Stefan dans le cas où la condition de frontière de Dirichlet est imposée.

Le mémoire contient trois chapitres.

Dans le premier chapitre , un rappel sur les équations de diffusion linéaire est donnée, et les differents types de problèmes aux limites avec la présentation des différentes technique de résolution.

Le chapitre deux est consacré à l'étude du problème de Stefan pour une équation de la chaleur sans second membre, nous présentons tout d'abord le problème de forme générale, ensuite un problème particulièr est résolu en détail avec la méthode d'auto similarité. Enfin en utilisant un forme plus générale de solutions auto similaire, nous présentons une nouvelle forme de paire de solutions.

Finalement dans le dernier chapitre on présente quelques travaux lié au problème de Stefan dans le cas de l'équation de la chaleur avec second membre.

Chapitre 1

Rappel sur l'équation de la diffusion linéaire

1.1 Équation aux dérivées partielles

Une EDP est équation dont l'inconnue est une fonction et fait intervenir les dérivées partielles de cette fonction . l'ordre de l'EDP est l'ordre maximal de dérivation de la fonction . On peut classifier les EDP en trois grandes familles:

1. les EDP elliptiques dont les prototypes sont l'équation de laplace $f = -\nabla u$
2. les EDP hyperbolique dont les prototypes sont l'équation de transport $\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ et l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta u$
3. les EDP paraboliques dont le prototype est l'équation de la chaleur $\delta u = \frac{\partial u \partial}{\partial t}$

Définition 1.1.1 (équation de la chaleur)

En mathématiques et en physique théorique, l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, introduite initialement en 1811 par Fourier pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. Elle est aussi utilisée en mathématiques financières.

Soit Ω un domaine de frontière $\partial\Omega$ et $u(x,t)$ un champ de température sur ce domaine, l'equation de la chaleur s'écrit:

$$\forall x \in \Omega \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

où t est une variable de temps, x un paramètre réel pour une barre dans laquelle est étudiée une diffusion de chaleur, et u la chaleur dans cette barre en fonction de t et x

Pour que le problème soit mathématique bien posé, il faut en général spécifier:

1. une condition initiale:$\forall x \in \Omega, u(x,0) = u_0(x)$
2. une condition aux limites sur le bord du domaine par exemple:
   - de Dirichlet: $\forall x \in \Omega$, $u(x,t) = 0$
   - ou de Neuman: $\forall x \in \partial\Omega$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial n} = \overrightarrow{n}(x), \overrightarrow{\nabla} u(x,t) = 0$ ou $\overrightarrow{n}(x)$ est vecteur normal unitaire au point x

1.2 Solution fondamentale de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) \;\; u_0 \text{ donnée} \end{cases}$$

la solution de l'équation de la chaleur est donnée par

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4at}\right)$$

on appelle cette solution, la solution élémentaire de l'equation de chaleur

1.3 Problème aux limites à condition initiales

Problème de Dirichlet homogène pour l'équation de la chleur:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t); 0 < x < l, t < 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

et la solution de problème de Dirichlet par la méthode de séparation des variables est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n e^{-a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 l} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

Problème de Dirichlet non homogène pour l'équation de la chaleur:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,; 0 < x < l, t < 0 \;\; a \geq 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = b \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

la solution est donnée par

$$u(x,t) = \frac{x}{l} b + \frac{(l-x)}{l} a + \sum_{n\geq 1} b_n e^{a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right) x$$

Problème de Neuman pour l'équation de la chaleur:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,; 0 < x < l, t < 0 \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

la solution est donnée par

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n e^{-a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l}\right) x \\ a_0 &= \frac{2}{l}\int_0^l u(x,0)\,dx \\ a_n &= \frac{2}{l}\int_0^l u(x,0) \cos\left(\frac{n\pi}{l}\right) x dx \end{aligned}$$

Problème mixte pour l'équation de la chaleur:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,; 0 < x < l, t < 0 \\ u(0,t) = 0 \\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

la solution donnée par

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum b_n e^{-a\left[\frac{(2n+1)}{2l}\pi\right]^2 t} \cdot \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right) \\ b_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right) dx \end{aligned}$$

1.4 Construction des solutions particulières

Pour la recherche des solutions exactes à $\mathrm{EDP_S}$ non linéaire, il existe plusieurs formes de solution particulière:

Méthode du séparation des variables

pour cette méthode, on donne deux formes de solutions sous les formes suivantes :

$$u(x,t) = F(\varphi_1(x)\psi_1(t) + \psi_2(t))$$
$$u(x,t) = F(\varphi_1(x)\psi_1(t) + \varphi_2(t))$$

le profil F et les fonctions φ_1, $\varphi_{2,}$ $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, doivent être déterminés.

D'autre part , c'est de recherche d'une solution sous la forme:

$$u(x,t) = f(t)g(x)$$

Les solutions auto similaires

cette méthode son principe est de rechercher une solution sous la forme:

$$u(x,t) = t^{\alpha} U(\tfrac{x}{t^{\beta}})$$

Ou U est une fonction d'une variable $\xi = \frac{x}{t^{\beta}}$, appelée "profil", α et β sont des constantes

Il existe aussi une forme générale des solutions auto-similaires dont la formeè

$$u(x,t) = c(t) U(\frac{x}{a(t)})$$

1.5 Problème de frontière libre-problème de Stefan-

En mathématiques un problème de frontière libre est une équation différentielle partielle à résoudre pour une fonction inconnue u et un domaine inconnu Ω. Le segment Γ de la limite de Ω qui n'est pas connu au début du problème est la frontière libre.

L'exemple classique est la fonte de la glace. Compte tenu d'un bloc de glace, on peut résoudre l'équation de la chaleur en tenant compte des conditions initiales et limites appropriées pour déterminer sa température. Mais, si dans une région la température est supérieure au point de fusion de la glace, ce domaine sera occupé à l'eau liquide. La limite formée à partir de l'interface glace / liquide est contrôlée dynamiquement par la solution de la EDP.

Problème de Stefan:

Un problème de Stefan est un problème particulier de valeur aux limite pour une équation différentielle partielle , adapté au cas où une limite de phase peut se déplacer avec le temps. Le problème classique de Stefan vise à décrire la distribution de la température dans un milieu homogène subissant un changement de phase, par exemple la glace passant à l'eau: ceci est réalisé en résolvant l'équation de chaleur imposant la distribution de température initiale sur l'ensemble du milieu et une condition limite particulière La condition de Stefan, sur l'évolution de la frontière entre ses deux phases. Notez que cette limite évolutive est une surface inconnue (hyper): par conséquent, les problèmes de Stefan sont des exemples de problèmes defrontières libres

Note historique:

Le problème est lié nom de Josef Stefan (Jožef Stefan), le physicien slovène qui a présenté la classe générale de ces problèmes vers 1890 en relation avec les problèmes de formation de glace. Cette question a été examinée plus tôt, en 1831, par Lamé et Clapeyron

Un problème de Stefan à une dimension et à une phase:

Problème classique de Stefan est un problème de gel et dégel. Pour obtenir une solution au problème classique de Stefan , il faut résoudre l'équation de la chaleur. .

Considérons un bloc de glace unidimensionnel semi-infini initialement à la température de fusion $u \equiv 0$ pour $x \in [0, +\infty]$. Le flux de chaleur de $f(t)$est introduit à la limite gauche du domaine, ce qui amène le bloc à fondre en laissant un intervalle $[0, s(t)]$ occupé par l'eau. La profondeur fondue du bloc de glace, désignée par $s(t)$, est une fonction inconnue du temps, la solution du problème de Stefan consiste à trouver u et s tel que

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$in \{(x,t) : 0 < x < s(t), t > 0\}$	L′équation de chaleur
$-\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = f(t)$	$t > 0$	La condition Neumann à l′éxtrémité gauche du domaine décrivantle flux de chaleur
$u(s(t),t) = 0$	$t > 0$	L′état du Dirichlet à l′interface eau glacée: réglage de la température de fusion/congélation
$\frac{ds}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial x}(s(t),t)$	$t > 0$	Condition de Stefan
$u(x,0) = 0$	$x \geq 0$	Température initiale
$s(0) = 0$		Profondeur initiale

Chapitre 2

Problèmes de frontières libres de type Stefan pour l'équation de chaleur

2.1 Problème à frontière libre de forme générale

Dans cette section, nous essayons de traiter une classe de problèmes de frontière libre de type général pour l'équation de la chaleur dans une dimension spatiale.On introduit la formulation de Friendman [10] qui consiste à chercher deux fonctions $u = u(x,t)$ et $s = s(t)$ qui satisfont aux équations suivantes:

$$u_t = u_{xx} \qquad \text{pour} \qquad 0 < x < s(t), t > 0, \tag{2.1.1}$$

$$u(0.t) = f(t) \geq 0 \qquad \text{pour} \qquad t > 0\ , \tag{2.1.2}$$

$$u(x,0) = \psi(x) \geq 0, \qquad \text{pour} \qquad 0 < x < b\ , \Psi(b) = 0, b > 0 \tag{2.1.3}$$

$$u(s(t),t) = 0, \qquad \text{pour} \qquad t > 0, \tag{2.1.4}$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = -u_x(s(t),t), \qquad \text{pour} \qquad t > 0 \tag{2.1.5}$$

$$s(0) = b. \tag{2.1.6}$$

Ici u la température de l'eau et l'equation $x = s(t)$ représente la frontière libre. Les conditions $(2.1.2)$, $(2.1.3)$ et $(2.1.4)$ sont généralement données pour la température alors que la condition (2.1.5) (l'équation d'equilibre thermique) est la condition sur la frontière libre $x = s(t)$. Les hypothéses $f \geq 0$ et $\psi \geq 0$ correspondent au fait que la température de l'eau est non négative .Ci-aprés ce problème sera désigné par PFL.I.

Définition 2.1.1 *Nous disons que u, s d'une solution de PFL.* (1)*pour* $0 < t < \sigma$ $(0 < \sigma < +\infty)$ *si la condition suivante est satisfaite:*

1. u_{xx} *et* u_t *sont continues pour* $0 < x < s(t), 0 < t < \sigma$.
2. u *et* u_x *sont continues pour* $0 \leq x \leq s(t), 0 < t < \sigma$.
3. u *est continue, aussi pour* $t = 0{,}0 < x \leq b$.
4. $s(t)$ *est continullement différentiale pour* $0 \leq t < \sigma$.
5. u *et* s *satisfaire PFL.I.*

Par Friedman [10] le théorème suivant pour PFL.I a été donné:

Théorème 2.1.1 *Dans PFL.I, on suppose que* $f(t)$ $(0 \leq t < +\infty)$ *et* $\psi(x)$ $(0 \leq x \leq b)$ *sont des fonctions continuellement différentiables , alors il existe une couple de solution* u *et* s *de PFL.I, pour* $0 < t < +\infty$ *. La frontière libre* $s(t)$ *est montone non décroissante en* t.

Nous donnerons un aperçu de la preuve du théorème 2.1.1. Au dèbut friendman[10] propose le lemme auxiliaire suivant, définie par :

Lemme 2.1.1 *On supposer que*

1. $\rho(t)$ $(0 \leq t \leq \sigma)$ *être une fonction continue.*
2. $s(t)$ $(0 \leq t \leq \sigma)$ *satisfaire une condition libshitz.*

puis pour chaque $0 < t \leq \sigma$.

$$\begin{aligned}&\lim_{x \to s(t)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \rho(\tau) K(x, t\ ;\ s(\tau), \tau)\, d\tau \\ &= \tfrac{1}{2}\rho(\tau) + \int_0^t \rho(\tau) [\tfrac{\partial}{\partial x} K(x, t;\ s(\tau), \tau)]_{x=s(t)} d\tau.\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

avec

$$K(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot \exp\left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)} \right\}.$$

Preuve. On introduit la fonction de Green pour la demi-droite $x > 0$ qui satisfait la condition aux limites $u(0, t) = 0\, (t > 0)$:

$$G\left(x, t;\ \xi, \tau\right) = K(x, t;\ \xi, \tau) - K(-x, t;\ \xi, \tau).$$

En intégrant l'identité de Green

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(G\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{\partial G}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \tau}(Gu) = 0$$

Sur le domaine $0 < \xi < s(t)$, $0 < \varepsilon < \tau < t - \varepsilon$ et en laissant $\varepsilon \to 0$, nous obtenons, en utilisant (2.1.2), (2.2.3), (2.1.4),

$$\begin{aligned}&u(x, t) = \textstyle\int_0^t u_\xi(s(\tau), \tau) G(x, t; s(\tau), \tau) d\tau \\ &+ \textstyle\int_0^t f(\tau) G_\xi(x, t;\ 0, \tau) d\tau + \int_0^t \psi(\xi) G(x, t;\ \xi, 0) d\xi\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

En indiquant $v(\tau) = u_\xi(s(\tau), \tau)$, nous différencions les deux côtés de (2.1.8) par rapport à x et laissez $x \to s(t) - 0$. En utilisant le lemme(2.1.1), nous obtenons, en introduisant la fonction Neumann $N(x, t; \xi, \tau) = k(x, t; \xi, \tau) + k(-x, t; \xi, \tau)$pour la demi-ligne $x > 0$,

$$\begin{aligned}&v(t) = 2[\psi(0) - f(0)] N(s(t), t;\ 0, 0) + 2\textstyle\int_0^b \dot{\psi}(\xi) N(s(t), t;\ \xi, 0) d\xi \\ &-2\textstyle\int_0^t \dot{f}(\tau) N(s(t), t;\ 0, \tau) d\tau + 2\int_0^t v(\tau) G_x(s(t), t;\ s(\tau), \tau) d\tau\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

où, par (2.1.5),

$$s(t) = b - \int_0^t v(\tau) d\tau. \tag{2.1.10}$$

Ce système intégral $(2.1.8) - (2.1.10)$ soit désigné par PFL.I$'$. En outre il est prouvé que pour chaque solution u, s de PFL.I. $v(t)$ doit satisfaire à l'équation intégrale (2.1.9) où $s(t)$

est défini par (2.10) .Supposons à l'inverse que pour certains $\sigma > 0$, $v(t)$ $(0 \leq t \leq \sigma)$ est une solution continue de l'équation intégral (2.1.9) où $s(t)$ est défini par (2.1.10) et $s > 0$. Alors il est également prouvé que $u(x,t)$, $s(t)$ (Où $u(x,t)$ est défini par (2.1.8) avec $u_\xi(s(\tau),t)$ replacépar $v(\tau)$) former une solution de PFL I. ■

Concernant le système intégral (2.1.9)−(2.1.10) comme une équation intégral non linéaire de type Volterra $v = T_b v$ (T_b = nonlinear) et l'introduction d'un espace fonctionnel approprié, l'existence et l'unicité d'une solution globale peuvent être prouvées d'une manière standard comme suit:

(i) Une solution locale dans le temps est construite en utilisant que T,

est une contraction lacale par rapport au temps

(ii) La solution locale est poursuivie sur un intervalle plus long à l'aide

de certaines estimations a priori appropriées.

Problème de frontière libre cas particulier:

En prenant $b = 0$ dans PFL, I ,

$$s(0) = 0 \tag{2.1.11}$$

On suppose que $f(t)$ vérifie ce qui suit:

Condition $(f.1)$: $f(t)$ continuellement différentiable en $0 \leqq t < +\infty$.

Condition $(f.2)$: $f(t)$ est non négative pour $0 \leqq t < +\infty$, et si $f(0) = 0$ $f(t)$ vérifier l'inégalité supplémentaire $\dot{f}(0) > 0$.

on va présent l'etude de l'éxistence et l' unicité de la solution du probléme qu'on va noter PFL.II.

Définition 2.1.2 *On dit que u, s à une couple de solution de PFL.II pour $0 < t < \sigma$ $(0 < \sigma < +\infty)$ si (u,s) satisfaisant la condition (1) et (2) dans la définition 2.1.1 et les conditions suivantes*

$(3)'$ $0 \leq \liminf u(x,t) \leq \limsup u(x,t) < +\infty$ *quand* $t \to 0, x \to 0$.

$(4)'$ $s(t)$ *est continue pour* $0 \leq t < \sigma$ *et en plus est continuellment difféntiable pour* $0 < t < \sigma$. *C-à-d* $v(t)$ *est continue pour* $0 < t < \sigma$.*de plus , v vérifie* $\int\limits_{0^+} .(-v((\tau))d\tau < +\infty$.

$(5)'$*u et s vérifie PFL.II*

La condition $(4)'$ *permet à une certaine singularité de* $v(t)$ *à* $t = 0$ *qui se produit réllement si* $f(0) = 0$.

Nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.1.2 *En PFL.II, on suppose que* $f(t)$ *vérifie la condition* $(f.1)$ *et* $(f.2)$.*Puis*

1. *il existe une couple de solution u, s pour PFL.II pour* $0 < t < +\infty$ *.*

Encore , s(t) définit la frontière libre est monotone non décroissante en t.

2. $x = s(t)$ *vérifie* $c_0 \leqq \dfrac{s(t)}{\sqrt{\int\limits_0^t f(\tau)d\tau}} \leqq c_1$ *dans un voisinage de* $t = 0$, *ou* $c_{i(i=1,2)}$ *est une constante dépendante* $f(t)$ *seulement.*

Pour la preuve du théoreme 2.1.1 la preuve voir [8]. Cependant nous donnons ici un bref apreçu de la démonstration de theoreme 2.1.2 comme suit :

1. Nous réduissons PFL.II à une équation intégrale non linéaire de type Volterra.

2. Pour $b > 0$, soit $u^b(x,t)$, $s^b(t)$ et$v^b(t)$ une solution unique de PFL.I$'$,avec $\psi = \psi^b(x) = \frac{f(0)}{b}(b - x)$ $(0 < x < b)$

Nous faisons $b = b_n \to 0$ une suite appropriée $b = b_n(n = 1, 2, ...)$ et prouver que $u^b \to u, s^b \to s$ et $v^b \to v$ ou u, s et v est une solution de PFL.II$'$.

Il faut noter que s^b définie en (2) vérifie la monotonie par rapport à b.Voir [8]

2.2 Le problème de fusion unidimentionnel

Le problème d'une phase à une seule phase pourrait être représenté comme un solide semi-fini, par exemple un mince bloc de glace occupant à la température de solidification. En ce qui concerne Frontière fixée du mince bloc de glace, il pourrait y avoir différents types de fonction de flux. Par exemple, on pourrait avoir une température constante qui se situe au-dessus de la température de solidification, c'est-à-dire ou une fonction en fonction du temps. Nous supposons que la température en phase solide est constante. Ainsi, le problème consiste à trouver la répartition de la température dans la phase liquide et l'emplacement de la limite libre. Même si il y aura deux phases présentes, le problème s'appelle un problème en une seule phase puisqu'il ne s'agit que de la phase liquide inconnu .

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{La région liquide} & & 0 \leq x < s(t) \\
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K_l}{CL_\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha_L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & & \text{L'équation de chaleur } 0 < x < s(t), t > 0 \\
u(0,t) = f(t), & & \text{Condition limite, } t > 0 \\
u(x,0) = 0, & & \text{Condition initiale} \\
\textbf{La frontière libre} & & x = s(t) \\
l\rho \frac{ds}{dt} = -K_L \frac{\partial u}{\partial x}, & & \text{Condition de Stefan} \\
s(0) = 0, & & \text{Position initiale de l'interface de fusion,} \\
u(s(t),t) = 0, & & \text{La condition de Dirichlet à l'interface,} \\
\textbf{Phase 2 - la région solide}, & & s(t) < x < \infty. \\
u(x,t) = 0, & \text{pour} & \text{tout } t, x \geq s(t).
\end{array}
\tag{2.2.1}
$$

2.3 Le principe de maximum

Dans notre domaine, la solution est donnée par l'équation de la chaleur, dont nous avons discuté ici.

Un outil très commun est important dans l'étude des équations par dérivation différentielle est le principe de maximum. Le principe de maximum n'est rien d'autre qu'une généralisation du fait de calcul de variable unique que le maximum d'une fonction f est atteint à l'un des points d'extrémité a et b de l'intervalle $[a, b]$ où $f\prime\prime > 0$. Par conséquent, nous pouvons dire plus généralement que les fonctions qui satisfaire une inégalité différentielle dans n'importe quel domaine Ω possèdent un principe de maximum, puisque leur maximum est atteint sur la limite $\partial\Omega$. Le principe de maximum nous aide à abaisser l'information sur la solution d'une équation différentielle même sans explication explicite l'information de la solution elle-même. Par exemple, le principe maximal est un outil important lorsqu'une solution approximative est recherchée pour la théorie suivante [14].

Définition 2.3.1 *(La limite parabolique). étant donné que l'équation de la chaleur est souvent prescrite avec sa température initialement et à l'extrémité. L'approche la plus naturelle consiste à considérer la région*

$$E_T = \{(x,t) : 0 < x < l\,(t)\,, 0 < t \leq T\} \tag{2.3.1}$$

Dans le plan- (x, t). Nous supposons que la température est connue sur les côtés restants de E_T :

$$\begin{aligned} s_1 &: \{x = 0.0 \leq t \leq T\}\,, & s_2 : \{0 \leq x \leq l\,(t)\,, t = 0\}\,, \\ s_3 &: \{x = l\,(t)\,, 0 \leq t \leq T\}\,. \end{aligned}$$

Lemme 2.3.1 *Assumer la fonction $u(x,t) \in C^2_{(1)}$ et satisfaire l'inégalité différentielle dans E_T. Alors vous ne pouvez pas atteindre sa valeur maximale à l'intérieur de la fermeture E_T de E_T.*

$$L\,[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} > 0 \tag{2.3.2}$$

Dans E_T. Alors vous ne pouvez pas atteindre sa valeur maximale à l'intérieur de la fermeture E_T de E_T.

Preuve. assume que vous obtenez sa valeur maximale dans un point intérieur $P = (x, t)$ de $\bar{E}$.comme le point P est un point critique, la dérivée u_T est 0 et puisque c'est un maximum

$u_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$. Cependant, cela contredit $L[u] > 0$ et donc Vous ne pouvez pas u avoir un maximum dans un point intérieur. ■

Théorème 2.3.1 *(Le principe faible maximum). Supposons que la fonction $u(x,t)$ satisfait l'inégalité différentielle*

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0 \tag{2.3.3}$$

Dans la région rectangulaire E_T donnée par (2.3.1) *la valeur maximale de u sur la fermeture $\overline{E_T}$doit se produire sur l'une des limites restan*

Preuve. Soit M la plus grande valeur de u qui se passe sur S_1, S_2 et S_3 supposons qu'il y a un point dans l'intérieur $P = (x_0, t_0)$ où $u(x_0, t_0) = M_1 > M_2$.

Définir la fonction d'aide

$$\omega(x) = \frac{M_1 - M}{2l^2}(x - x_0)^2 \tag{2.3.4}$$

De ω et u on définit la fonction

$$\upsilon(x,t) = u(x,t) + \omega(x) \tag{2.3.5}$$

Sur les frontières S_1, S_2 et S_3, nous avons $u \leq M$ and $0 < x < l$ et donc

$$\upsilon(x,t) \leq M + \frac{M_1 - M}{2l^2} < M_1 \tag{2.3.6}$$

Au point intérieur (x_0, t_0) nous avons

$$\upsilon(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) + 0 = M_1 \tag{2.3.7}$$

Et dans E_T nous avons

$$L[\upsilon] = L[u] + L[\omega] = L[u] + \frac{M_1 - M_2}{l^2} > 0 \tag{2.3.8}$$

À partir de la condition (2.3.7) et (2.3.8), nous pouvons conclure que le $\upsilon(x_0, t_0)$ maximum doit être atteint soit à l'intérieur de E, soit le long de

$$S_4 : \{0 < x < l, t = T\}$$

À partir du lemme 2.3.1, nous savons que l'inégalité (2.3.9) ne nous donne aucune possibilité pour un maximum intérieur. Si nous avons un maximum sur S_4, on obtient $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0$ qui implique que $\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=T}$. Il faut que v ait une valeur plus grande à un moment précédent $t < T$ et à partir de ceci contradiction, nous pouvons constater que notre hypothèse $u\left(x_0, t_0\right) > M$ est erronée. ■

Remarque 2.3.1 *Remarquez que le théorème* (2.3.1) *est que le principe maximum faible et le théorème permet le maximum de se produire sur les points intérieurs, en plus de la frontière.*[3]

Théorème 2.3.2 *(Le principe maximum fort). Supposons qu'il y ait un* $\left(x_0, t_0\right)$ *dans* E_T *tel que* $u\left(x_0, t_0\right) = \max \overline{E_T} u$*.puis est* $u\left(x, t\right) = u\left(x_0, t_0\right)$ *pour tous* $\left(x, t\right) \in E_T$

Preuve. voir [3] . ■

2.4 Existence et unicité

Il est essentiel de montrer que ce problème est bien posé. Un problème bien posé pour une équation différentielle partielle est nécessaire pour satisfaire les critères suivants, [4]:

1) Une solution au problème existe.

2) La solution est unique.

3) La solution dépend continuellement des données .

Pour donner des conclusions sur la solution à une équation différentielle partielle, nous exigeons l'existence d'une solution unique. Si nous ne disposons pas d'une solution unique, nous dépendons de la solution choisie pour être la bonne. La dernière exigence est importante dans les problèmes liés aux applications physiques, car il est préférable que notre solution ne change pas beaucoup lorsque les conditions initiales sont perturbées.

Théorème 2.4.1 ([4] *théorème 1, page 216*) *.Pour la condition aux limites* $u\left(0, t\right) = f\left(t\right)$ *(qui est continuellement différentiable) et* $u\left(x, 0\right) =$ *constant, il existe une solution unique* $\left\{u\left(x, t\right),\ s\left(t\right)\right\}$ *du système pour tous de système* (2.2.1) *pour tout* $t < \infty$.

Preuve. voir Avner Friendman $[4, p.222]$ ■

Théorème 2.4.2 ([4], *théorème 1, page 217)Si u et $s(t)$ donnent une solution pour tout $t < \sigma$, où σ est un nombre fini, alors $x = s(t)$ est une fonction monotone non décroissante.*

Preuve. De la faible principe maximum donné par le théorème (2.2.1), nous savons que

pour $u(x,t) \geq 0$. Etant donné que la température u est égal à 0 à la limite $x = s(t)$, la vitesse de variation de la température par rapport à x à la limite libre $x = s(t)$ est inférieure ou égale à 0. nous obtenons à partir de la condition de Stefan que $\frac{ds}{dt} \geq 0$, soit la limite libre $s(t)$ est monotone non décroissante ■

2.5 Solution auto similaire pour problème de Stefan

ici nous allons considérer le problème de Stefan défini comme suit :

$$u_t = \alpha_L u_{xx} \qquad 0 < x < s(t), t > 0 \tag{2.5.1}$$

$$u(s(t), t) = 0 \qquad t > 0 \tag{2.5.2}$$

$$l_p \frac{ds}{dt} = -k_l u_x s(t), \qquad t > 0 \tag{2.5.3}$$

$$s(0) = 0 \tag{2.5.4}$$

$$u(0,t) = u_0 > 0 \qquad t > 0 \tag{2.5.5}$$

avec $l_p = k_l = 1$. ce probléme sera désigné par PFL.III.

Nous alllons rechercher la solution sous la forme :

$$u(x,t) = F(\varepsilon(x,t))$$

Avec

$$\varepsilon = \frac{x}{\sqrt{t}} \tag{2.5.6}$$

où $F(\varepsilon)$ est une fonction inconnue encore à trouver. En remplaçant l'équation (2.5.6) dans l'équation de la chaleur (2.5.1) donnée . on a

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt}(x,t) &= \frac{dF}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{-x}{2t\sqrt{t}}\frac{dF}{d\varepsilon} && (2.5.7)\\
\frac{du}{dx}(x,t) &= \frac{dF}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dF}{d\varepsilon} && (2.5.8)\\
\alpha_L\frac{d^2u}{dx^2}(x,t) &= \alpha_L\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{dF}{d\varepsilon}\right)\frac{d\varepsilon}{dx} = \alpha_L\frac{1}{t}\frac{d^2F}{d\varepsilon^2} && (2.5.9)
\end{aligned}$$

les équations (2.5.8) et (2.5.10) donnent l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre

$$\frac{d^2F}{d\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{2\alpha_L}\frac{dF}{d\varepsilon} = 0 \tag{2.5.10}$$

Qui peut être résolu avec un facteur d'intégration

$$M(\varepsilon) = e^{\int_{s_0}^{\varepsilon} \frac{s}{2\alpha_L} ds} = c_1 e^{\frac{\varepsilon^2}{4\alpha_L}} \tag{2.5.11}$$

Où $c_1$est une constante d'intégration . $M(\varepsilon)$ dans l'equation (2.5.12) est multiplié par l'équation (2.5.11) et en identifiant la règle de produit que nous avons :

$$\frac{d^2F}{d\varepsilon^2}M(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2a_l}M(\varepsilon)\frac{dF}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}\left(M(\varepsilon)\frac{dF}{d\varepsilon}\right) = 0 \tag{2.5.12}$$

Et en intégrant l'équation (2.5.13) , nous obtenons

$$M(\varepsilon)\frac{dF}{d\varepsilon} = c_2 \tag{2.5.13}$$

Où c_2 est une constante d'intégration du théorème fondamental du calcul la solution de l'équation (2.5.14) qui s'écrit:

$$F(\varepsilon) = c\int_0^{\varepsilon} e^{-\frac{s^2}{4\alpha_L}} ds + D \tag{2.5.14}$$

Où D est une constante d'intégration .

En pourrait écrire l'équation (2.5.15) en fonction de la fonction d'erreur

$$F(\varepsilon) = A \operatorname{erf}\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\alpha_L}}\right) + D \tag{2.5.15}$$

donc la solution de l'équation (2.5.1) est

$$u(x,t) = F\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = A \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_L t}}\right) + D \tag{2.5.16}$$

À partir de la condition de frontière à $x = 0$ et $x = s(t)$ on obtient

$$D = u_0 \tag{2.5.17}$$

et

$$A = \frac{0 - u_0}{\operatorname{erf}(\lambda)} \tag{2.5.18}$$

où

$$\lambda = \frac{s(t)}{2\sqrt{t\alpha_L}} \tag{2.5.19}$$

Comme A dans l'équation (2.5.19) est constant, il s'ensuit que λ doit également être constant.

Alors

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{a_l t}. \tag{2.5.20}$$

et avec les constantes A et D, la solution s'écrit comme :

$$u(x,t) = u_0 - \frac{u_0}{\operatorname{erf}(\lambda)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_L t}}\right) \tag{2.5.21}$$

Sur le paramètre λ

la condition de Stefan à la frontière libre $x = s(t)$ est

$$l_p \frac{ds}{dt} = -k_l u_x(s(t), t) \tag{2.5.22}$$

et la dérivée temporelle de $s(t)$ est

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\lambda\sqrt{\alpha_L t}\right) = \lambda\frac{\sqrt{\alpha_L}}{\sqrt{t}} \tag{2.5.23}$$

et pour l'autre dérivée dans la condition de Stefan, nous devons d'abord prendre la dérivée spatiale de la solution u donnée par l'équation (2.5.22)

$$u_x(x,t) = -\frac{u_0}{\operatorname{erf}(\lambda)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\alpha_l t}}} e^{-y^2} dy = \frac{-u_0}{\operatorname{erf}(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{-x^2}{4\alpha_L t}}}{\sqrt{\alpha_L t}} \tag{2.5.24}$$

et $x = s(t)$

$$u_x(s(t),t) = -\frac{u_0}{\operatorname{erf}(\lambda)} \frac{e^{-\lambda^2}}{\sqrt{\alpha_L t}\sqrt{\pi}} \tag{2.5.25}$$

En mettant l'équation (2.6.1) et (2.5.1) dans la condition de Stefan (2.5.23).

Pour résoudre, on obtient l'équation suivante :

$$\lambda e^{\lambda^2} \operatorname{erf}(\lambda) = \frac{k_L}{pl\alpha_L} \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} = \frac{C_L(u_0)}{\sqrt{\pi}} = \frac{St_L}{\sqrt{\pi}} \tag{2.5.26}$$

où St_L le nombre de Stefan

En résumant la solution de $u(x,t)$ et $s(t)$, et la condition pour λ, donne

$$\begin{cases} u(x,t) = u_0 - \frac{u_0}{\operatorname{erf}(\lambda)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_L t}}\right) \\ s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_L t} \\ \lambda e^{\lambda^2} \operatorname{erf}(\lambda) = \frac{St_L}{\sqrt{\pi}} \end{cases} \tag{2.5.27}$$

2.6 Solution auto-similaire générale

Nous allons proposer une forme plus générale de solution auto-similaire étudiée dans 2.5. Ce travail constitue une petite contribution dans la recherche de solution auto similaire pour le problème de Stefan.

Considérons le problème PFL.III et essayant de rechercher une solution sous la forme :

$$u(x,t) = \varphi(\varepsilon(x,t)) \tag{2.6.1}$$

avec

$$\varepsilon = \frac{x}{a(t)} \qquad \text{où} \quad a(t) > 0 \tag{2.6.2}$$

où $F(\varepsilon)$ est une fonction inconnue à trouver. En injectant la forme l'équation (2.6.1) dans (2.5.1) donnée. On a

$$\frac{du}{dt}(x,t) = \frac{d\varphi}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{-xa'}{a^2}\frac{d\varphi}{d\varepsilon} = -\varepsilon\frac{a'(t)}{a(t)}\frac{d\varphi}{d\varepsilon} \tag{2.6.3}$$

$$\frac{du}{dx}(x,t) = \frac{d\varphi}{d\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dx} = \frac{1}{a(t)}\frac{d\varphi}{d\varepsilon} \tag{2.6.4}$$

$$\alpha_l\frac{d^2u}{dx^2}(x,t) = \alpha_L\frac{1}{a^2(t)}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right)\frac{d\varepsilon}{dx} = \alpha_L\frac{1}{a^2(t)}\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2} \tag{2.6.5}$$

les équations (2.6.3) et (2.6.5) donnent l'équation suivante:

$$-\varepsilon\frac{a'(t)}{a(t)}\frac{d\varphi}{d\varepsilon} - \alpha_L\frac{1}{a^2(t)}\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2} = 0 \tag{2.6.6}$$

par la méthode de séparation des variables, on obtient :

avec $\alpha_l = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2} = A_2\frac{d\varphi}{d\varepsilon} \\ \frac{a'(t)}{a(t)} = -\frac{A_2}{a^2(t)} \end{cases}$$

par intégration de la deuxième équation :

$$\int\frac{a'(t)}{a(t)} = -\int\frac{A_2}{a^2(t)} \qquad \Rightarrow \int aa'dt = -\int A_2\ dt\ \Rightarrow \frac{a^2}{2} = -A_2\ t + k$$

on obtient :

$$a(t) = \sqrt{2(-A_2t+k)} \tag{2.6.7}$$

d'autre part il peut être résolu avec un facteur d'intégration

$$H(\varepsilon) = e^{\int\limits_{s_0}^{\varepsilon}\frac{s}{2\alpha_L}ds} = c_1e^{\frac{\varepsilon^2}{4\alpha_L}} \tag{2.6.8}$$

Où $c_1$est une constante d'intégration. $M(\varepsilon)$ dans l'équation (2.6.8) est multiplié par l'équation (2.6.6) et en identifiant la règle de produit que nous avons :

$$\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2}H(\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{2\alpha_L}H(\varepsilon)\frac{d\varphi}{d\varepsilon}=\frac{d}{d\varepsilon}\left(H(\varepsilon)\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right)=0 \tag{2.6.9}$$

Et en intégrant l'équation (2.6.9) , nous obtenons

$$H(\varepsilon)\frac{d\varphi}{d\varepsilon}=c_2 \tag{2.6.10}$$

Où c_2 est une constante d'intégration du théorème fondamental du calcul la solution de l'équation (2.6.10) qui s'écrit

$$\varphi(\varepsilon)=c\int_0^\varepsilon e^{-\frac{s^2}{4\alpha_L}}ds+D \tag{2.6.11}$$

Où D est une constante d'intégration .

En pourrait écrire l'équation (2.6.11) en fonction de la fonction d'erreur

$$\varphi(\varepsilon)=A\,\mathrm{erf}\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\alpha_L}}\right)+D \tag{2.6.12}$$

donc la solution de l'équation (2.5.1) est

$$u(x,t)=\varphi\left(\frac{x}{a(t)}\right)=A\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_L t}}\right)+D \tag{2.6.13}$$

À partir de la condition de frontière à $x=0$ et $x=s(t)$ on obtient

$$D=u_0 \tag{2.6.14}$$

et

$$A=\frac{0-u_0}{\mathrm{erf}(\lambda)} \tag{2.6.15}$$

où

$$\lambda=\frac{s(t)}{2a(t)\sqrt{\alpha_L}} \tag{2.6.16}$$

comme A dans l'équation (2.6.15) est constant. Il s'ensuit que λ doit aussi être constant

.

Ainsi

$$s(t)=2\lambda a(t)\sqrt{\alpha_L} \tag{2.6.17}$$

et avec les constantes A et D, la solution s'écrit comme :

$$u\left(x,t\right)=u_0-\frac{u_0}{\operatorname{erf}\left(\lambda\right)}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a(t)\sqrt{\alpha_L t}}\right) \tag{2.6.18}$$

Sur le paramètre λ

la condition de Stefan à la frontière libre $x=s\left(t\right)$ est

$$l_p\frac{ds}{dt}=-k_l u_x\left(s\left(t\right),t\right) \tag{2.6.19}$$

et la dérivée temporelle de $s\left(t\right)$ est

$$\frac{ds\left(t\right)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(2\lambda a(t)\sqrt{t\alpha_L}\right)=\lambda\frac{\sqrt{\alpha_L}}{a(t)} \tag{2.6.20}$$

et pour l'autre dérivée dans la condition de Stefan, nous devons d'abord prendre la dérivée spatiale de la solution u donnée par l'équation (2.6.18)

$$u_x\left(x,t\right)=-\frac{u_0}{\operatorname{erf}\left(\lambda\right)}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\frac{x}{2a(t)\sqrt{t\alpha_L}}}e^{-y^2}dy=\frac{-u_0}{\operatorname{erf}\left(\lambda\right)}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{\frac{-x^2}{4\alpha_L a^2(t)}}}{a(t)\sqrt{t\alpha_L}} \tag{2.6.21}$$

et $x=s(t)$

$$u_x\left(s(t),t\right)=-\frac{u_0}{\operatorname{erf}\left(\lambda\right)}\frac{e^{-\lambda^2}}{a(t)\sqrt{t\alpha_L}\sqrt{\pi}} \tag{2.6.22}$$

En mettant l'équation (2.6.22) et (2.6.20) dans la condition de Stefan (2.6.19).

Pour résoudre, on obtient l'équation suivante :

$$\lambda e^{\lambda^2}\operatorname{erf}(\lambda)=\frac{k_L}{pl\alpha_L}\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}=\frac{C_L(u_0)}{\sqrt{\pi}}=\frac{St_L}{\sqrt{\pi}} \tag{2.6.23}$$

où St_L le nombre de Stefan

En résumant la solution de $u(x,t)$ et $s(t)$, et la condition pour λ, donne

$$\left\{\begin{array}{c} u(x,t)=u_0-\frac{u_0}{\operatorname{erf}(\lambda)}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_L t}}\right) \\ s(t)=2\lambda a(t)\sqrt{t\alpha_L} \\ \lambda e^{\lambda^2}\operatorname{erf}(\lambda)=\frac{St_L}{\sqrt{\pi}} \\ a(t)=\sqrt{2(-A_2 t+k)} \end{array}\right. \tag{2.6.24}$$

Chapitre 3

Problème de frontière libre de type Stefan avec second membre

3.1 Problème de Stefan avec flux (source connue)

Soit le probème de l'équation de la chaleur avec second membre suivant [12]:

$$u_{xx} - u_t = F(x,t) \qquad for \quad a < x < s(t), 0 < t < T \tag{3.1.1}$$

avec la condition aux limites générales suivante:

$$\alpha u_x(a,t) + \beta u(a,t) = f(t) \qquad for \quad 0 < t < T \ , \alpha \geq 0, \ \text{ et } \ \beta \geq 0 \tag{3.1.2}$$

et la condition initiale suivante

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad for \quad -\infty < a \leq x \leq b = s(0) \tag{3.1.3}$$

$$u(s(t),t) = g(s(t),t) \qquad for \qquad 0 < t < T \tag{3.1.4}$$

et de condition générale de la frontière libre (condition de Stefan) :

$$\gamma(s(t),t)\,\dot{s}(t) = -u_x(s(t),t) + h(s(t),t) \quad \text{ for } \ 0 < t < T \tag{3.1.5}$$

Où les fonctions $F(x,t)$, $f(t)$, $\varphi(x)$, $g(x,t)$ et $h(x,t)$ sont des fonctions données, définies pour $a < x < \infty, 0 < t < T$,α et β sont des nombres réels et T un nombre réel fixe $0 < T < \infty$.

Selon [12] , on va traiter deux problèmes comme cas particulier de notre problème général.

La distinction préliminaire entre les problèmes Stefan dont nous occuperons se tiendra dans (3.1.5), mais nous devons également tenir compte de deux problèmes différents dans lesquels le flux est prescrit. Notre principale préoccupation est de fournir une méthode de résolution de la méthode 1 et 2 ce qui peut être indiqué comme suit:

Problème 1: si nous laisons $\gamma(x,t) = 0$ dans (3.1.5) on obtient un problème dans lequel le flux est prescrit, dans ce cas (3.1.5) se spécialise à

$$u_x(s(t), t) = h(s(t), t) \qquad \text{pour} \quad 0 < t < T \tag{3.1.6}$$

et nous faisons léxigence additionnelle que

$$g_x(x,t) \neq h(x,t) \quad \text{pour } a < x < \infty, 0 < t < T \tag{3.1.7}$$

pour notre deuxième problème avec le flux prescrit voudrait exiger que $\gamma(x,t) = 0$ et $g_x(x,t) = h(x,t)$ où $g_{xx} - g_t - F \neq 0$ pour $\alpha < x < \infty$, $0 < t < T$.Ces conditions se posent dans le problème associé à la statistique et au contrôle optimal.Dans ce cas les condition au limites (3.1.4) et (3.1.5) peut être simplifiée en passant á la nouvelle variable dépendant $u - g$ et nous arrivons au problème suivant

Problème 2: laisser $\gamma(x,t) = g(x,t) = h(x,t) = 0$. Dans ce cas (3.1.4) et (3.1.5) se spécialiser dans

$$u(s(t), t) = 0 \text{ pour } 0 < t < T, \tag{3.1.8}$$

$$u_x(s(t), t) = 0 \text{ pour } 0 < t < T, \tag{3.1.9}$$

et nous faisons léxigence additionnelle que

$$F(x,t) \neq 0 \text{ pour } \alpha < x < \infty, 0 < t < T. \tag{3.1.10}$$

le problème de Stefan qui est associé à la fusion des solides peut être énoncé comme suit:

Problème 3: ici nous éxigeons que dans (3.1.5)

$$\gamma(x,t) \neq 0 \text{ pour } \ a < x < \infty, 0 < t < T. \tag{3.1.11}$$

problème 1 et 2, comme indiqué ci-dessus, sont données pour l'équation de la chaleur et une seule frontière inconnue avec les données initiales $\varphi(x)$ donné à l'intervalle fini.

D'autre problème peuvent être traités par la méthode à présenter Pour la problème 1, La méthode s'étend facilement au cas où l'équation de la chaleur est remplacée par l'équation quasilinéaire de la forme

$$A(x,t,u_x)\, u_{xx} + B(x,t,u_x) + C(t)\, u - u_t = 0$$

avec la condition $A(x,t,u_x) \geq A_0 > 0$.Pour probléme 2 nous traitons également des équation de la forme

$$A(x)\, u_{xx} + B(x)\, u_x + C(x)\, u - u_t = F(x,t)$$

Où $A(x) \geq A_0 > 0$. Dans les deux cas, l'intervalle fini peut être remplacé par $a = -\infty$ et nos méthodes devraient en principe travailler pour des problèmes de notre type avec plus d'une frontière libre.

Dans section 2 nous traiterons de l'équivalence formelle des problémes 1 et 2 avec problème 3. Dans section 3 nous illustrons notre méthode en démontrant certains théorémes d'existence et iniquité pour problémes 1 et 2.

3.1.1 Formules d'équivalence

Les considérations de cette section sont formelles ce que nous souhaitons souligner ici, cést l'observation que (sans la condition appropriée)

1. si la paire(s,u) est une solution du problème 1 Alors le paire (s,u_x) est une solution d'un problème du type de problème 3.

2. si la paire (s,u) est une solution du problème 2 Alors le paire (s,u_t) est une solution d'un problème du type de problème 3

Dans les deux cas, une solution peut être obtenue à partir de la solution du premièr par une simple intégration voir [12].

Nous commencerons par le problème 1 ici nous pouvons traiter les cas dans lesquels soit $\alpha = 1$, $\beta = 0$ ou $\alpha = 0$, $\beta = 1$, mais pour la simplicité nous ne considérons que l'ancien

3.1.2 Hypothèses des données

Supposons que (3.4.7) est satisfait $\alpha = 1$, $\beta = 0$ et en plus

1. $F(x,t), g(x,t) \in C$, $h(x,t) \in C^1$ pour $a \leq x < \infty, 0 < t < T$.
2. $f(t) \in C$ pour $0 \leq t < T$
3. si $a < b$ puis $\varphi \in C^1$ pour $a \leq x < b$ et $\varphi(b) = g(b,0), \varphi'(b) = h(b,0)$.

Définition 3.1.1 *par une solution* (s,u) *de* $(3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4), (3.1.6)$ *avec* $\alpha = 1$, $\beta = 0$, *on entend une paire de fonction* $s(t)$ *et* $u(x,t)$ *ayant les propriétés:*

1. $s(t) \in C[0,\ T), \dot{s}(t) \in C(0,T), s(0) = b, s(t) > \alpha$ pour $0 < t < T$.
2. $u \in C$ pour $a \leq x \leq s(t), 0 \leq t < T$. $u_x \in C$ pour $a \leq x \leq s(t), 0 \leq t < T$ sauf peut être à $(a,0)$ où u_x rest borné $u_{xx}, u_t \in C$ pour $a \leq x \leq s(t), 0 < t < T.u_{xx}, u_{xt} \in C$ pour $a < x < s(t), 0 < t < T$.
3. $s(t)$ et $u(x,t)$ satisfait $(3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4), (3.1.6)$.

Définition 3.1.2 *par une solution* (s,v) *de* $(3.1.12), (3.1.13), (3.1.14), (3.1.15), (3.1.16)$, *on entend une paire de fonction* $s(t)$ *et* $v(x,t)$, *où* $s(t)$ *est dans la définition* 3.1.1 *et* $v(x,t)$ *a toutes les propriétés de* $u_x(x,t)$ *dans la définition* 3.1.1. *En outre* $(3.1.12) - (3.1.16)$ *sont satisfaits.*

Théorème 3.1.1 *Supposons que les hypothèse de donnée 1.*

1) Si (s,u) est une solution de $(3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4), (3.1.6)$, alors la paire (s,u) où s est comme dans (s,u) et $v = u_x$ est la solution de problème de Stefan

$$v_{xx} - v_t = F(x,t) \qquad \text{pour} \qquad a < x < s(t), 0 < t < T, \tag{3.1.12}$$

$$v(a,t) = f(t) \qquad \text{pour} \qquad 0 < t < T, \tag{3.1.13}$$

$$v(x,0) = \varphi'(x) \qquad \text{pour} \qquad a \leq x \leq b = s(0), \tag{3.1.14}$$

$$v(s(t),t) = h(s(t),t) \qquad \text{pour} \qquad 0 < t < T, \tag{3.1.15}$$

$$[h(s(t),t) - g_x(s(t),t)]\dot{s} = -v_x(s(t),t) + F(s(t),t) + g_t(s(t),t) \quad \textit{pour} \quad 0 < t < T \tag{3.1.16}$$

où depuis $h \neq g_x$(3.1.12), $-$, (3.1.16) constitue un problème de type 3.

2) inversement , si la paire (s,v) est une solution de $(3.1.12) - (3.1.16)$, alors la paire (s,u), où s est comme dans (s,v) et u est défini par

$$u(x,t) = -\int_x^{s(t)} v(\zeta,t)\,d\zeta + g(s(t),t) \quad \text{pour} \quad a \leq x \leq s(t), 0 \leq t < T,$$

est un solution de $(3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4), (3.1.6)$ est dans le cas $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

3) la solution (s,u) de $(3.1.1)$, $(3.1.2)$, $(3.1.3)$, $(3.1.4)$, $(3.1.6)$ est unique, (s,u_x) étant la solution unique de $(3.1.12) - (3.1.16)$.

Preuve. pouver (1) ensemble $v = u_x$, puis (3.1.12) et (3.1.14) sont obtenus en différenciant simplement (3.1.1) et (3.4.3) par arapport à x (3.1.15) est obtenue directement (3.1.6) et dans ce cas où $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, (3.1.13) est obtenue directement forme $(3.1.2)$.Obtenir (3.1.16) Nous différencions (3.1.4) le long da la frontière libre et obtenons.

$$u_x(s,t)\,\dot{s}(t) + u_t(s,t) = g_x(s,t)\,\dot{s}(t) + g_t(s,t).$$

(3.1.16) puis suit l'utlisation (3.1.1) et $(3.1.6)$.

Prouver (2) nous remarquons d'abord que (3.1.16.) et nos hypothèses sur v cette $u \in C$ pour $\alpha \leq x \leq s(t).0 \leq t < T.$ (3.1.4) suit immédiatement et (3.1.3) suit aprés avoir utilisé (3.1.3) et la relation de compatibitite $\varphi(b) = g(b,0)$.

Différencier (3.1.17) par rapport à x on obtient $u_x(x,t) = v(x,t)$ à partir du quel (3.1..2) et (3.1.6) suivre . À présent $u_{xx}(x,t) = v_x(x,t)$ et

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) &= -\int_x^{s(t)} - v_t(\zeta,t)\,d\zeta - v(s(t),t)\,\dot{s}(t) + g_x(s(t),t)\,\dot{s}(t) + g_t s((t),t) \\
&= -\int_x^{s(t)} [v_{xx}(\zeta,t) - F_x(\zeta,t)]\,d\zeta + v_x(s(t),t) - F(s(t),t) \\
&= v_x(x,t) - F(x,t) \qquad .
\end{aligned}$$

(3.1.1) et les propriétés restantes de u maintenant facilement suivre.

L'actroi de l'existence d'une solution (3) suit immédiatement de (1) qui compléte la démonstration du théoréme.[12]. ■

Dans ce cas , $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (c/est à dire $u(x,t)$ est prescrit) la même technique fonctionne.Dans ce cas (3.1.13) est remplacé par

$$v_x(a,t) = f'(t) + F(a,t).$$

Pour obtenir ce ci nous demandons d'abord que u_t et u_{xx} soient continus sur $x = a$ pour $0 < t < T$.puis

$$u_t(a,t) = f'(t) = u_{xx}(a,t) - F(a,t) \qquad \text{ou} \qquad v_x(a,t) = f'(t) + F(a,t).$$

Nous traiterons alors le problème 2. Nous examinerons ici le cas $\alpha = 0$, $\beta = 1$.Notre méthode fonctionne aussibien sans cette restriction dans (3.1.2) , à condition que des modifications appropriées soient apportées dans la classes des solutions.

3.1.3 Hypothèses des données

Supposer que $\alpha = 0$, $\beta = 1$, (3.1.10) est satisfait et en plus:

1. $F(x,t) \in C^1$ pour $a \leq x < \infty$, $0 < t < T$.

2. $f(t) \in C^1$ pour $0 \leq t < T$ et si $a = b$, $f(0) = 0$.

3. si $a < b$ puis $\varphi(x) \in C^2$ pour $a \leq x \leq b$ et $f(0) = \varphi(a)$, $\varphi^{'}(b) = \varphi'(b) = 0$

Définition 3.1.3 *:Supposer* $\alpha = 0,\ \beta = 1$*.Par une solution* (s,u) *de* $(3.1.1)$, $(3.1.2)$, $(3.1.3)$, $(3.1.8)$, $(3.1.9)$, *nous entendons une paire de fonction* $s(t)$ *et* $u(x,t)$ *ayant les propriétés:*

1. $s(t) \in C[0,T),\ s(t) \in C(0,T),\ s(0) = b,\ s(t) > \alpha$ pour $0 < t < T$.
2. $u,\ u_x \in C$ pour $a \leq x \leq s(t), 0 \leq t < T$. $u_{xx},\ u_t \in C$ pour $a \leq x \leq s(t), 0 \leq t < T$ sauf éventuellement au point $(a,0)$ ils restent bornés. $u_{xt} \in C$ pour $a < x \leq s(t)$, $0 < t < T.u_{xxt},\ u_{tt} \in C$ pour $a < x < s(t), 0 < t < T$.
3. $s(t)$ et $u(x,t)$ satisfait $(3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.8), (3.1.9)$.

Définition 3.1.4 *par une solution* (s,v) *de* $(3.1.17), (3.1.18), (3.1.19), (3.1.20), (3.1.21)$, *(voir ci -dessous), on entend une paire de fonction* $s(t)$ *et* $v(x,t)$, *où* $s(t)$ *est dans la définition* 3.1.3 *et* $v(x,t)$ *a toutes les propriétés de* $u_x(x,t)$ *dans la définition* 3.1.3*.de plus la paire* (s,v) *satisfait .* $(3.7) - (3.11)$ *sont satisfaits.*

Théorème 3.1.2 *Supposons que hypothèse 2.*

1) si (s,u) est la solution de $(3.1.1), (3.1.2), (3.1.3), (3.1.8), (3.1.9)$, alors la paire (s,v) où s est comme dans (s,u) et $v = u_t$ est un solution du problème de stefan

$$v_{xx} - v_t = F_t(x,t) \qquad \text{pour} \qquad a < x < s(t), 0 < t < T, \tag{3.1.17}$$

$$v(a,t) = f'(t) \qquad \text{pour} \qquad 0 < t < T, \tag{3.1.18}$$

$$v(x,0) = \varphi''(x) - F(x,0) \qquad \text{pour} \qquad \alpha \leq x \leq b = s(0), \tag{3.1.19}$$

$$v(s(t),t) = 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 < t < T, \tag{3.1.20}$$

$$F(s(t),t)\,\dot{s}(t) = -v_x(s(t),t) \qquad \text{pour} \qquad 0 < t < T, \tag{3.1.21}$$

Où un de (3.1.10) ceci constitue un problème du type de problème 3.

2) inversement , si la paire (s,v) est une solution de $(3.1.17) - (3.21)$, alors la paire (s,u), où s est comme dans (s,v) et u est défini par

$$u(x,t) = \int_x^{s(t)} \int_\eta^{s(t)} [\ v(\zeta,t)\,d\zeta + F(\zeta,t)]d\zeta d\eta \quad \text{pour} \quad a \leq x \leq s(t), 0 \leq t < T, \tag{3.1.22}$$

est un solution de $(3.1.1)$, $(3.1.2)$, $(3.1.3)$, $(3.1,8)$, $(3.1.9)$.

3) la solution (s,u) de $(3.1.1)$, $(3.1.2)$, $(3.1.3)$, $(3.1.8)$, $(3.1.9)$ est unique , (s,u_t) étant la solution unique de $(3.1.17)-(3.1.21)$.

Preuve. prouver (1) ensemble $u_t = v$. (3.1.17) et (3.1.18) puis suivre directement de (3.1.1) et (3.1.2) aprés avoir simplement différencié par rapport à t .(3.1.19) découle de (3.1.1) et (3.1.3) afin d'obtenir (3.1.20), nous différencions (3.1.8) alonge la frontière libre et obtenir $u_x(s,t)\dot{s} + u_t(s,t) = 0 = v(s,t)$ .Différenciant maintenant (3.1.9) alonge la frontière libre que nous avons $u_{xx}(s,t)\dot{s} + u_{tx}(s,t) = 0 = 0$. (3.1.21) utilise maintenant (3.1.1) et (3.20) .Les preuves de (2) et (3) suivent beaucoup de la même maniére que la preuve de (2) et (3) du théorème 3.1.1. ■

3.2 Problème de Stefan pour l'équation de la chaleur avec second membre non-classique

3.2.1 Inroduction

Le problème non-classique de conduction de chaleur pour un matériau semi-infinite a été étudié sans [17] [16]

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \phi(x)F(u_x(0,t)), & x>0,\, t>0 \\ u(0,t) = g(t) & t>0, \\ u(x,0) = h(x) & x>0, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Où ϕ, g, h sont des fonctions réeles définies sur $\mathbb{R}^+$et F et définie sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ qui dépend du flux de chaleur à l'extrimité $x=0$.Des problèmes non classiques comme (3.2.1)

sont motivée par la modilisation d'un système de régulation de température en milieu isotrope et le terme source $\phi(x)F(u_x(0,t))$ décrit un effet de refroidissement ou d'un chauffage en fonction des propriétes de F qui sont liées à l'évolution de flux de chaleur $u_x(0,t)$, c'est ce qu'on appelle le problème de thermostat. Les problèmes qui sont en relation. Parmi les hypothèses appropriées sur les donnés, l'existence, l'unicité et la dépendance continue monotone sur les données sont établies en [17] pour le problème (3.2.1).

Il a été considéré dans le cas simple du probléme(3.2.1) donné [17]

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -F(u_x(0,t)), & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = h(x) & x > 0 \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Où $h(x)$, $x > 0$, et $F(v)$, $v \in \mathbb{R}$, sont des fonctions continues. La fonction F, appelée fonction test de contrôle, a été supposée remplir la condition suivante

A) $vF(v) \geq 0$, $F(0) = 0$,

Ce qui signifie intuitivement que le contrôle tente de stabiliser le processus à chaque fois.

Comme le montre le [18] (voir aussi [17]), la solution problème (3.2.2) peut être représentée par

$$u(x,t) = u_0(x,t) - \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) F(V(\tau))d\tau, \tag{3.2.3}$$

où $u_0 = u_0(x,t)$, Défini par

$$u_0(x,t) = \int_0^{+\infty} G(x,t.;\xi,0)h(\xi)d\xi, \tag{3.2.4}$$

est la solution du probléme (3.2.2) avec un terme source à terme nul $F = 0$.La fonction $V = V(t)$ en (3.2.3)

réprésente le flux thermique à l'éxtrimité de la plaque c-à-d :

$$V(t) = u_x(0,t), \ t > 0, \tag{3.2.5}$$

et elle satisfait à l'équation intégral de Volterra suivante :

$$V(t) = V_0(t) - \int_0^t \frac{F(V(\tau))}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau, \tag{3.2.6}$$

où la fonction de forçage $V_0(t)$ est donné par

$$V_0(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4t}\right) h(\xi)d\xi, \ t > 0. \tag{3.2.7}$$

La fonction G dans (3.2.4) désigne la fonction de Green de l'équation de la chaleur dans le quart de plan et, comme on le sait, elle peut être écrite comme

$G(x,t;\xi,\tau) = k(x,t;\xi,\tau) - k(-x,t;\xi,\tau)$, x, $\xi > 0$, $0 < \tau < t$, où

$$k(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)$$

Il est le noyau de la cheleur unidimentionnelle.De plus, on définie également la fonction de Neumann de l'équation de la chaleur dans le plan de quart comme

$$N(x,t;\xi,\tau) = k(x,t;\xi,\tau) + k(-x,t;\xi,\tau),\ x,\ \xi > 0,\ 0 < \tau < t,$$

à partir de maintenant, on suppose que h est une fonction non négative et non identiquement nulle, en vue de (3.2.7), implique $V_0(t) > 0$, $t > 0$.Lorsque la fonction de contrôle F satisfait la condition (A) et, encore, la température initiale h est non négative, alors la solution $u(x,t)$ de problème (3.2.2) tend vers zéro quand $t \to +\infty$ (voir [17], [18]). Dans [17] on a étudié les problème de "contrôle" de probléme (3.2.2) à F de sorte que,par l'effet stabilisateur du contrôle, sa solution doit converge vers zéro (lorsque le temps passe à l'infini) plus rapidement que celle correspondant au problème (3.2.2) en l'absence de contrôle, c-à-d $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)/u_0(x,t) = 0$.

Le flux thermique $w(x,t) = u_x(x,t)$ satisfait un problème classique de conduction thermique avec une condition convective non linéaire à $x = 0$., une étude générale du problème de contrôle mentionné ci-dessus pour (3.2.2) a été faite en trouvant des bornes spatialement uniformes pour le quotient $u(x,t)/u_0(x,t)$ qui dépends de la solution $V(t)$ à l'équation intégrale (3.2.6), d'ou devient évident que la conditon (A) n'est pas suffisant pour atteindre le but du contrôle, c-à-d, pour obtenir $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)/u_0'(x,t) = 0$. Dans la section 2, pour les fonctions de contrôle linéaires $F(v) = \lambda v$, on donne un exemple pour illustrer qu'il existe une solution exacte au probléme (3.2.6) fournit $u(x,t)/u_0(x,t) \cong 1/(2\lambda^2 t)$, $t \to +\infty$.Dans la section 3, on présente un problème Stefan monophasé pour un matériau semi-infini pour une équation de chaleur non classique avec un terme de source F qui dépend de l'évolution du flux de chaleur à l'extrémité $x = 0$. Sa solution est donnée par la solution d'un système de deux systéme de deux équations intégral de Volterra .

3.2.2 Températeur initiale constante

on considère l'instance du problème (3.2.2) correspondant à une températeur initiale constante $h(x) = h_0 > 0,\ x \geq 0$.La solution du problème (3.2.2) est réprésenter par (3.2.3) avec

$$u_0(x,t) = h_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right),\ \ x > 0,\ \ t > 0.. \tag{3.2.8}$$

Tandis que $V = V(t)$ devient la solution de l'équation intégrale du Volterra

$$V(t) = \frac{h_0}{\sqrt{\pi t}} - \int_0^t \frac{F(V(\tau))}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau, t > 0. \tag{3.2.9}$$

Par conséquant, les inégalités suivantes

$$\frac{\sqrt{\pi t}}{h_0} V(t) \leq \frac{u(x,t)}{u_0(x,t)} \leq \frac{1}{h_0} \int_0^t \frac{V(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau = 1 - \frac{1}{h_0} \int F(V(\tau)) d\tau \tag{3.2.10}$$

pour $x > 0$, $t > 0$.

On suppose que le cas des contrôles linéaires c-à-d,

$$F(v) = \lambda v,\ \ (\lambda > 0) \tag{3.2.11}$$

et pour obtenir les solutions explicites u et V des problèmes (3.2.2) et (3.2.9) respectivement, on définit la fonction réelle $Q(x) = \sqrt{\pi} x \exp(x^2) \operatorname{erf} c(x)$, définit pour $x > 0$ qui satisfait aux propriétés suivantes:

$Q(0) = 0$, $Q(+\infty) = 1$, $Q'(x) > 0$, $x > 0$.Les faits les plus importants sur le comportement de la solution $V(t)$ de l'équation (3.2.9) correspondant à un controle linéaire (3.2.11) sont collectés dans le resultats suivants.

Lemme 3.2.1 *Si F est donné par* (3.2.11)*, alors on a*

$$0 < V(t) = \frac{h_0}{\sqrt{\pi t}} \left[1 - Q\left(\lambda \sqrt{t}\right)\right] < \frac{h_0}{\sqrt{\pi t}}, \tag{3.2.12}$$

$$1 - \frac{1}{h_0} \int F(V(\tau)) d\tau = \exp\left(\lambda^2 t\right) \operatorname{erf} c\left(\lambda \sqrt{t}\right) \tag{3.2.13}$$

pour tout $t > 0$ *et* $\lim_{t \to +\infty} u(x,t)/u_0'x,t) = 0$, *uniformement en* $x > 0$, *en plus, on a les estimations*

$$\frac{1}{\pi\lambda^2 t} \leq \frac{u(x,t)}{u_0(x,t)} \leq \frac{1}{\lambda\sqrt{\pi t}}, \tag{3.2.14}$$

quand $t \to +\infty$.En outre,la température u donnée par

Lemme 3.2.2

$$u(x,t) = h_0 \exp\left(\lambda^2 t\right)\left[\operatorname{erf} c\left(\lambda\sqrt{t}\right) - \exp\left(\lambda x\right)\operatorname{erf} c\left(\lambda\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{3.2.15}$$

et une estimation plus précise $\frac{u(x,t)}{u_{0(x,t)}} \sim 1/\left(2\lambda t^2\right)$, *quand* $t \to +\infty$, *uniforment en* $x > 0$ *est également obtenue.*

3.2.3 Problème de Stefan pour l' équation de chaleur non-classique

On considère le problème de frontière libre suivant pour la températeur $u = u(x,t)$ et la frontière libre $x = s(t)$ avec une fonction de contrôle F qui dépend de l'évolution du flux thermique à l'extrémité $x = 0$ donné par les conditions suivantes:

$$\left\{\begin{array}{cc} u_t - u_{xx} = -F(u_x(0,t)), & 0 < x < s(t),\, 0 < t < T \\ u(0,t) = f(t) \geq 0 & 0 < t < T \\ u(s(t),t) = 0, u_x(s(t),t) = -\dot{s}(t), & 0 < t < T \\ u(x,0) = h(x) & 0 \leq x \leq b = s(0) \end{array}\right. \tag{3.2.16}$$

Théorème 3.2.1 *La solution de problème de frontière libre* (3.2.16)*est donnée par*

$u(x,t) = \int_0^b G(x,t;\, \xi, 0)d\xi + \int_0^t G_\xi(x,t;\, 0,\tau)d\xi + \int_0^t G_\xi(x,t;\, s(\tau),\tau)v(\tau)d\tau$
$\quad - \int\int_{D(t)} G(x,t;\, \xi,\tau)d\xi d\tau,$
$s(t) = b - \int_0^t v(\tau)d\tau$

où $D(t) = \{(x,\tau)\,/0 < x < s(\tau),\, 0 < \tau < t\}$, et $v(t) = u_x(s(t),t) = -\dot{s}(t)$ et $V(t) = u_x(0,t)$ doivent satisfaire au système suivant de deux équations intégrales de Volterra

$v(t) = 2\left[h(0) - f(0)\right] N(s(t),t;0,0) + \int_0^b N(s(t),t;\xi,0)h'(\xi)d\xi$

$-2\int_0^t N(s(t),t;0,\tau)\dot{f}(\tau)d\tau + 2\int_0^t G_x(s(t),t;s(\tau),\tau)v(\tau)d\tau$
$+2\int_0^\tau [N(s(t),t;s(\tau),\tau) - N(s(t),t;0,\tau)]\, F(V(\tau))d\tau,$

$V(t) = [h(0) - f(0)]\, N(0,t;\ 0,0) + \int_0^b N(0,t;\ \xi,0)h'(\xi)d\xi - \int_0^t N(0,t;\ 0,\tau)\dot{f}(\tau)d\tau + \int_0^t G_x(0,t;\ s(\tau),\tau)v(\tau)d\tau + \int_0^\tau [N(0,t;\ s(\tau),\tau) - N(0,t;\ 0,\tau)]\, F(V(\tau))d\tau,$

ou G et N sont les fonctions de Green et Neumann de l'équation de la chaleur dans le quart de plan définie précédemment.

Preuve. on calcul $u_x(x,t)$ et leur limites correspondantes comme $x \to 0^+$et $x \to s(t)^-$.En utilisant les relations de saut de systéme de deux équations intégrales de Volterra tient l'étude correspondante de l'existence et de l'unicité de la section sera donnée dans un document à paraître. ■

3.3 Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons fait une étude générale sur le problème de la chaleur à frontière libre, appelé problème de Stefan. Un théorème général d'existence a été présenté, et une étude d'existence et d'unicité ainsi que Le principe du maximum est mentionné dans ce travail.. Une approche de recherche de solutions auto similaire pour un problème de Stéfan avec des conditions aux limites particulières est détaillée également dans ce mémoire. Une petite contribution est également présentée dans la recherche de solutions auto-similaire générale pour le problème de stefan pour l'équation de la chaleur.

Enfin dans la dernière partie, une étude a été consacrée au problème de Stefan pour l'équation de la chaleur avec second membre qui contient deux problèmes: problème de Stefan avec flux (source connue) et le deuxième problème est appelé problème de Stefan pour l'équation de la chaleur avec second membre non-classique.

Le problème de Stefan est intérressant en pratique, plusieurs phénomènes physiques peuvent être réprésentés pour ce problème

.

.

Bibliographie

[1] **V.Alexiades** and **A.D**. Socom.Mathematical Modeling of Melting and Free sing processes.Hemisphere Publishing corporation, washington, 1993.

[2] **D.ANDREUCE**, lecture notes on the stefan problem.2002.

[3] **M.H.Protter** and **H.F**. Weiuberger. Maximun Principles in Differential Equation .Prentice.Hall, Inc, London,1967.

[4] **A.Friedman**.Partial differntial.of Parabolic Type. Prentice Hall, Inc, Englewood chiffs, N.J, 1964.

[5] **Douglas, J, A** Uniqueness theorem for the solution of a stefan problem,Proc.Amer .Math .,2(1957),402.408.

[6] **Kyner,W.T.**, An existence and uniqueness theorem for a nonlinear stefan Problem, J.Math.Mech, 9(1959), 438-498.

[7] **Tobias Jonsson**, on the one dimensional stefan problem.

[8] **Hideo Kawarad**,.Stefan type Free boundary Problem for Heat Equations.

[9] **Rubinstein,L.I.**, on the determination of portion.of the boundary which separater two phases in the one dimensional problem of stefan , DOKLADY AKAD, 58 (1957) 217-220.

[10] **Friedman, A**, Free boundary problems for parabolic equations I .Melting of solids, J.Math.Mech., 8(1959), 499-518.

[11] **Evans II, G. W**, A note on the existence of a solution to a problem of Stefan , Quart, Appl, Math., 9(1951) 185-193.

[12] **Alfred Schatz**, free Boundary Problems of stefan type with prescribed flux Department of Mathematics, Carnell Universsity, Ithaca, New York 1985 Submitted by R.J.Duffin.

[13] **Friendman, A**., Partial differential equation of parabolic type , Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N, J., 1964.

[14] **J.R.Cannon**, the one dimensional heat equation addison wesley.Reading, (1984).

[15] **Kolodner, I ,J** Free boundary problem for the heat equation with applications to problems of change of phase, *comme.Pure Appl .Math., 9(1956), 1-31.*

[16] **Domingo, A.Tarzia** A Stefan problem for a non-classical heat equation, MAT-Serie A , 3 (2001), 21-26.

[17] **D.A Tarzia -L.T.Villa ,** Some nonlinear heat conduction problems for semi infinite strip with a non-uniforme heat source , Rev.Un .Mat .Argentina , 41(2000), 99-114.

.