

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE M'SILA
FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR

DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME
D'INGENIEUR D'ETAT EN GENIE ELECTROTECHNIQUE

OPTION: COMMANDE ELECTRIQUE

THEME

**MODELISATION DU CHAMP ELECTRIQUE ET DE LA DENSITE DE COURANT LORS
D'UNE DECHARGE COURONNE MONO-POLAIRE PAR LA METHODE DES ELEMENTS
FINIS**

Proposé et dirigé par :

Monsieur: **H. NOURI**

Présenté par :

**BOUSSEKRA FAYZA
DAHMOUNE RABIHA**

Année Universitaire : 2006 / 2007

OPTION: COMMANDE ELECTRIQUE

Proposé et dirigé par : Monsieur: **H. NOURI**

Présenté par : **BOUSSEKRA FAYZA**
DAHMOUNE RABIHA

Thème :

**MODELISATION DU CHAMP ELECTRIQUE ET DE LA DENSITE DE COURANT LORS
D'UNE DECHARGE COURONNE MONO-POLAIRE PAR LA METHODE DES ELEMENTS
FINIS**

Résumé :

Un nouvel outil numérique pour simuler la distribution spatiale du champ électrique et de la densité de courant dans la géométrie fil plan est proposé.

L'outil numérique utilisé pour le suivi du mécanisme de l'effet couronne est la méthode hybride: MIE-M.C-MEF (méthode des images électriques – méthode des caractéristique - méthode des éléments finis). Par cet outil nous avons réussi à retrouver les résultats de Tassicker, d'Adamiak et d'Al- Hamouz.

Ce projet de fin d'étude pour le cycle ingénieur, propose donc une synthèse sur la physique des décharges électriques dans les gaz. Pour ce sujet, englobe dans les sciences de l'ingénieur du fait des nombreuses applications technologiques des décharges. Nous nous sommes efforcés de comprendre et de modéliser ce phénomène en faisant intervenir plusieurs domaines différents.

Mots Clés:

Décharge couronne, ionisation, polarisation, potentiel, champ, charge d'espace, densité de couronne, MEF

REMERCIEMENTS

« LE GRAND MERCI POUR LE BON DIEU »

Ce mémoire est le fruit de beaucoup d'efforts et de persévérance. Il n'aurait certainement jamais vu le jour si nous n'avons pas bénéficié des conseils avisés, du soutien, des discussions enrichissantes et de l'aide de plusieurs personnes.

La réalisation de ce travail a été sous la direction de notre encadreur monsieur HAMOU NOURI pour nous avoir guider et conseiller le long de ce travail.

Nous remercions le président de jury et les membres de jury : d'avoir accepter d'évaluer ce travail.

Nos remerciements vont aussi à tous les enseignants du département d'électrotechnique ainsi que le chef de département Mr BENJAÏMA.

Nous tenons à remercier tous ce qui a participé de proche ou de loin à l'accomplissement de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents qui m'ont été d'un grand soutien

Que je n'oublierais jamais.

A ma chandelle dans ma vie ma chère BOKALETE FATIHA.

A mon grand frère NACER

A mes très chers frères HAMZA et BOUALLEM

A mes sœurs NADIA, SAMIA, LILA, HANANE et HAYAME

A ma fleur de ma vie CHAHDOU, GHADA, LAMISSE, et WIDAD

A ma famille SAADI, A mon fiancée MESSAOUD.

A mes autres très chers sœurs ZAHYA et AZIZA

A mon symbole d'amour, ma vie LOUBNA et sa famille

A ceux qui ont exprimé le sens de l'amitié, l'amour

BENSAÏDE HANANE Que je n'oublierais jamais

A mon binôme REBIHA et sa famille

A mon meilleur ami HADJER et WISSEME

A mes fleurs NOUR EL HOUDA et IBTISSEME

A tous mes élèves

A mes amis AMINA, MARY, NADRA, FATIMA, SARA, NAWEL,

LINDA, NADIA, NASSIRA, HALIMA,

BOUCHRA, AFIFA, CHAFIA, MAHIRA, NASSIMA.

Aux gens que j'aime..... ;

FAIZA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents qui m'ont été d'un grand soutien

Que je n'oublierais jamais.

A mes très chers frères AISSA, MOUSSA

ABOUD, MEHDI, HAKKOU et ILIYASSE

A tous ma famille DAHMOUNE et BEN YOUNESSE

A mes symbole d'amour, à mon chère, Qui m'encourage

mon marié BEN YOUNESSE

A mon binôme FAIZA et sa famille

A mes fleur NOUR EL HOUDA et IBTISSEME

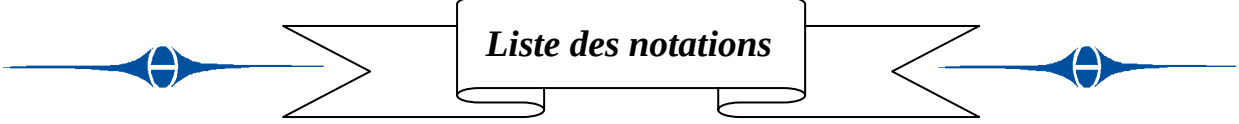
A mes meilleur ami AICHA ET KAMMAR

LOUBNAHADJER et WISSEME

A toutes mes collègues

Et A toutes mes amis

REBIHA

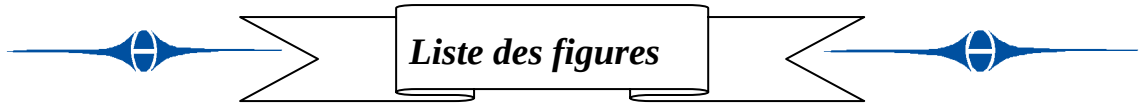


Liste des notations

E	Le champ électrique.
E_c	Le champ critique en kV /cm.
E_p	Le champ superficiel en kV/cm.
R	Le rayon de conducteur en m.
δ	La densité relative de l'air.
T	La température en C° .
P	La pression de l'air en cm hg.
d	La distance entre les électrodes.
$d_{\max}$	La distance maximale entre les électrodes.
E_0	Le champ de seuil de l'effet couronne.
ξ	Coefficient en cm^2 / vs .
f	La fréquence Hz.
α	Le premier facteur de Townsend.
γ	Le deuxième facteur de Townsend.
n_0	Nombre d'électrons initiaux.
n	Nombre total d'électrons.
i	Le courant de décharge.
η	Coefficient d'attachement électronique.
$\bar{\alpha}$	Coefficient effectif d'ionisation
Lc	Largeur de la première zone d'ionisation.
V_s	La tension seuil.
E_s	Le champ seuil.
k	Constante dépendant de la géométrie de l'électrode.
H	Hauteur de conducteur par rapport à la plan.
U	La tension appliqué.
V_b	La tension de polarisation négative.
r_s	Rayon du plan circulation.
r_e	Rayon intérieur.

R_e	Rayon extérieur.
I_s	Courant de la sonde.
I_{s0}	Courant e la sonde lorsque $V_b = 0$.
Φ_s	Le flux a travers la sonde
Φ_{s0}	Le flux a travers la sonde lorsque $V_b = 0$.
r_m	Le rayon effectif de la sonde.
C_0	La capacité formée par les deux surface (s) et (E) .
E_b	Le champ de polarisation.
g	Intervalle d'air.
a	Largeur du collecteur.
(A) et (B)	Plaques de la sonde (collecteur).
(C) et (C')	Les plans de garde
Ψ	L'angle entre les deux demi plans.
y_m	Demi largeur effective du collecteur (a).
b_m	Demi largeur de la sonde.
Φ_A	Le flux a travers le collecteur (a).
Φ_B	Le flux a travers le collecteur (b).
Φ_{A0}	Le flux d'origine.
MEF	Méthode des éléments finis.
EDP	Equation aux dérivées partielles.
u	Fonction inconnue.
z, m, n	Des fonction données.
u_n	Fonction d'approximation.
Ω	Domaine donnée.
Ω^e	Domaine des éléments
S_b	L'espace de l'approximation.
N_{ma}	Nombre total de mailles.
$u_{ex}(x)$	La fonction exacte.
$u(x)$	La fonction approchée.

$u^e(x)$	Les fonction approchées sur chaque domaine.
u_1, u_2, u_3, u_4	Variables nodales.
$a_1, a_2, \dots, a_n$	Paramètre des fonctions.
x_1, x_2, x_3, x_4	Coordonnées nodales.
Ω^r	L'élément de référence.
Ω^e	L'élément réel.
$[K]$	Matrice caractérisant le système.
$\{U\}$	Les variables inconnues.
$\{F\}$	Les sollicitations connues.
E et $\mathcal{G}$	Opérateurs différentiels caractérisant le système.
f_Ω et $f_{\partial\Omega}$	Fonctions connues dites sollicitations
$[M]$	La matrice masse.
$[C]$	La matrice d'amortissement
S, S_e et S_s	Les surfaces des plan de la sonde.
ε_0	La permittivité de l'air, en Fm^{-1} .
ρ	La densité de la charge d'espace en (C/m^3) .
$\vec{J}$	Le vecteur de la densité de courant en (A/m^2) .
μ	La mobilité des ions.
η	Le facteur de la surface irrégularité.
V	Le potentiel aux fils de décharge.
V_{app}	La tension appliquée à l'électrode.
q	La quantité de la charge.
W	La fonction d'énergie.
i, j et m	Les noeuds de l'élément (e).
α_1, α_2 et α_3	Les coefficients qui calculer à partir de la loi de Cramer.
Δ_e	La surface de l'aire de l'élément triangulaire (e).
l	Le numéro de l'itération.
E_{rr}	L'erreur sur le potentiel.
$N_1, N_2, \dots, N_n$ et $P_1, P_2, \dots, P_n$	Fonction linéaires indépendantes.



Liste des figures

Chapitre I :

Figure I.1 : Les différentes formes des aigrettes

Figure I.2: Tube à décharge.

Figure I.3 : Représentation schématique d'une décharge couronne continu en géométrie fil-plan

Chapitre II :

Figure II.1 : schéma d'un moulin à champ.

Figure II.2 : sonde circulaire.

Figure II.3 : Distribution du flux à la surface de la sonde circulaire .

Figure II.4 : Vue de dessus de la sonde polarisée linéaire

Figure II.5 : Vue générale du système d'électrodes

Figure II.6 : Coupe transversale de la sonde.

Figure II.7 : Champ entre deux plans.

Figure II.8 : analyse de la distribution géométrique du champ de polarisation.

Figure II.9 : Inversion du champ à la surface du collecteur (A) de la sonde linéaire.

Figure II.10 : Inversion du champ à la surface des plaques de polarisation (B) de la sonde linéaire

Figure II.11 : Courbe d'étalonnage de la sonde $(I_3 / I_{so}) = f(E_p)$ donnée Pour $V_b = \pm 1 \text{ volt}$ ($E = E_p$ pour $V_b \pm 1 \text{ volt}$)

Chapitre III :

Figure III.1 : Organigramme général de la résolution par la MEF.

Figure III.2: Approximation à une dimension.

Figure III.3: Approximation à deux dimensions.

Figure III.4 : Relation entre l'élément réelle et l'élément de référence.

Figure III.5 : Illustration de l'assemblage par un exemple à deux éléments

Chapitre IV:

Figure IV-1 : Organigramme des étapes de résolution du problème de la décharge couronne

Figure IV-2: Configuration fil- plan avec les frontières artificielles

Figure IV-3 : Représentation des charges simulant la configuration fil-plan

Figure IV-4 : Tracé d'une ligne de champ pour la configuration fil-plan.

Figure IV-5: Représentation d'une portion de lignes du champ, de contours équipotentiel et des triangles formés

Figure IV.6 : Les lignes de champ pour le domaine de calcul.

Figure IV.7 : Les lignes de champ pour tout le domaine de calcul

Figure IV.8 : discrétisation du domaine de calcul en éléments finis.

Figure IV.9 : Variation de l'aire des éléments triangulaires en fonction de la distance par rapport à l'électrode active.

Figure IV.10 : Variation du potentiel au plan

Figure IV.11 : Variation du potentiel entre le fil et le plan collecteur.

Figure IV.12 : Distribution spatiale du potentiel entre les deux électrodes de la configuration.

Figure IV.13 : Distribution spatiale du champ électrique.

Figure IV.14 : Variation du champ électrique par rapport à l'axe du plan.

Figure IV.15 : Variation du champ électrique au plan en fonction de la tension appliquée

Figure IV.16 : Variation du champ électrique au plan en fonction de la tension appliquée et en fonction de la distance du plan.

Figure IV.17 : Distribution de la densité de charge suivant les lignes de champ.

Figure IV.18 : Variation de la densité de courant entre les deux électrodes

Figure IV.19 : Variation du rapport ' I_s/I_{so} ' en fonction de la tension de polarisation V_b

Table des matières

Introduction générale	1
------------------------------------	----------

Chapitre I **Généralités sur la décharge de couronne.**

I.1-Introduction.....	4
I.2-Définition de l'effet couronne.....	5
I.3-Mécanisme.....	5
I.3.1-Au niveau macroscopique.....	5
I.3.2-Au niveau microscopique.....	6
I.3.3-Propriétés électriques.....	6
I.4- Aspect physique du phénomène en tension alternative.....	6
I.4.1- Nature de l'effet couronne.....	6
I.4.1.1- Avalanche électronique.....	6
I.4.1.2 Modes d'émission des charges- Aigrettes	7
I.4.2 -Seuil critique de l'effet couronne.....	9
I.5- Modes de décharge par effet de couronne.....	10
I.5.1-Effet de couronne en tension continu positive.....	10
I.5.2- effet de couronne continu négative.....	11
I.5.3- Effet de couronne en tension alternative.....	11
I.6- Processus de la décharge de couronne.....	12
I.7-Théorie de TOWNSEND.....	12
I.8-Décharge couronne en géométrie file- plan.....	15
I.8.1-Champ seuil de la décharge couronne.....	16
I.8.1.1- Travaux antérieurs.....	16
I.8.1.2- Théorie actuelle.....	17
I.8.2- Loi de Townsend (dans la géométrie fil plan).....	18
I.9- Problèmes liés aux décharges de corona.....	19
I.9.1-Réduction de l'effet corona sur les lignes électriques.....	19
I.9.2-Réduction de l'effet Corona dans les postes électriques.....	20
I.10-conclusion.	20

Chapitre II

Mesure du champ électrique par la sonde de Tassicker

II .1- Introduction.....	21
II- 2-Machines à champ.....	21
II.2.1-Moulin à champ.....	22
II.2.2- Le fluxmètre électrostatique.....	23
II.2.3- Sonde à champ statique.....	23
II.2.3.1- Sonde capacitive.....	23
II .2.3.2- Sonde polarisée.....	24
II .3- Théorie de la sonde polarisée circulaire.....	24
II.3.1- Cas où E_b s'oppose à E	26
II.3.2- Cas où E_b s'ajoute à E	27
II.4- Théorie de la sonde polarisée linéaire.....	28
II.4.1- Calcul de champ local E_b	29
II.4.2- Champ entre deux plans.....	31
II.4.3- Champ crée par quatre plans coplanaires.....	32
II.4.4- Courbes d'étalonnage $I_s/I_{s0}=f(E)$	33
II-.4.4.1- E_b De sens oppose à E	33
II-.4.4.2- E_b De même sens que E	34
II.5-Conclusion.....	39

Chapitre III

Présentation de la méthode des éléments finis

III.1-Introduction.....	40
III.2- Le problème modèle.....	41
III.3- Principes de la méthode des éléments finis.....	42
III.4- Exposé de la démarche.....	43
III.5- Approximation par éléments finis.....	45
III.5.1-Approximation nodale.....	45
III.5.2-- Approximation par élément finis.....	47

III.5.2.1- Approximation à une dimension par éléments finis	48
III.5.2.2- Approximation linéaire à deux dimensions par éléments finis	50
III.6- Formes des éléments.....	51
III.6.1- Eléments Classiques.....	51
III.6.2- Eléments de références.....	52
III.7- Formulation intégrale.....	55
III.7.1- Problèmes équilibre, de valeurs propres et de propagation.....	55
III.7.1.1- Problème d'équilibre ou de valeurs aux limites.....	56
III.7.1.2- Problème de valeurs propres ou de valeurs critiques.....	56
III.7.1.3- Problèmes de propagation ou de valeurs initiales.....	56
III.7.2- Transformation des formes intégrales.....	58
III.7.2.1- Intégration par parties.....	58
III.7.2.2- Forme intégrale faible.....	59
III.8- Assemblage de la forme globale discrétisée W.....	60
III.8.1- Assemblage par expansion des matrices élémentaires.....	60
III.8.1.1- Vecteurs élémentaire et global	61
III.8.1.2- expansion de $[k]$	62
III.8.1.3- Remplacement de $\langle \delta u_n \rangle$ par $\langle \delta U_n \rangle$	63
III.8.1.4- Expansion de $\{f\}$	64
III.8.2- Technique d'assemblage	64
III.9-Conclusion	65

Chapitre IV

Simulation numérique de la décharge couronne

IV.1- Introduction	66
IV.2- Modèle mathématique.....	67
IV.2.1- Simplification Des Prétentions	68
IV.2.2-Les conditions de frontière.....	68
IV.3- Différentes étapes de résolution numérique:	69
IV.3.1- Etape 1 -Génération du maillage électrostatique	69
IV.3.2- Etape 2 -Evaluation d'erreurs	73
IV.3.2.1-Méthode d'interpolation / extrapolation	73
IV.3.2.2- Méthode des éléments finis (MEF)	76

IV.3.2.2.1-Conditions aux limites.....	78
IV.3.3- Etape 3 -Résolution de l'équation de Poisson	78
IV.3.3.1-Méthode simplifiée des caractéristiques	79
IV.3.4- Etape 4 Reconstitution du maillage.....	81
IV.4-Résultat et interprétation	82
IV.4.1- Les lignes de champ	82
IV.4.2- Le maillage	83
IV.4.3- Le potentiel.....	85
IV.4.4- Le champ électrique.....	86
IV.4.5-La densité de charge	89
IV.4.6- La densité de courant	89
IV.4.7- le courant de décharge	90
IV.5- Conclusion	91
Conclusion générale	92

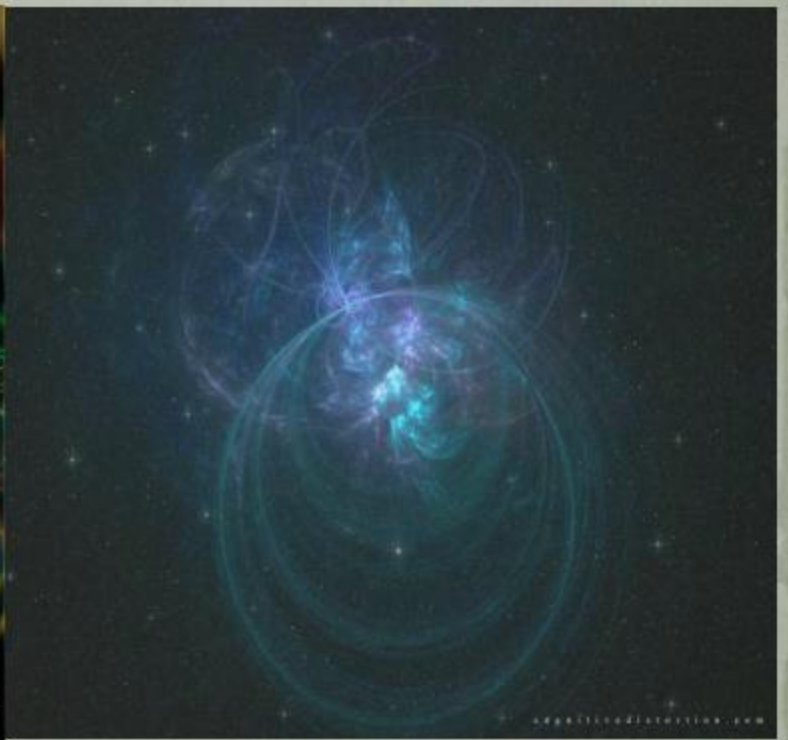
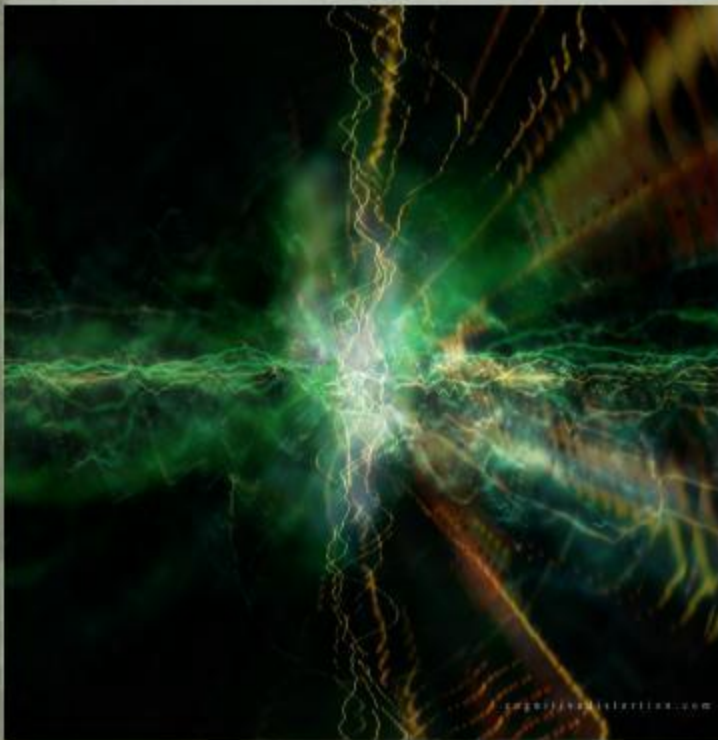
Références bibliographiques

Introduction⁰¹

$$d \rho / dr = -\rho / \epsilon_0 \cdot E$$

$$[K] \cdot [V] - [F] = 0$$

générale



*Dans la vie, tu es l'unique responsable
de tout ce que tu vis et expérimentes.
Qu'il s'agisse de ton humeur, de ton
caractère ou de ta situation sociale,
tout ceci n'est en réalité qu'une
image projetée de ce que tu
penses et imagines
au plus profond de toi-même.*

Les progrès rapides observés durant ces dernières années dans le domaine de la technologie, et plus spécialement dans les domaines qui touchent beaucoup de branches de technique sont toujours dépendants avec les méthodes numériques utilisées et la formulation d'un problème posé.

L'étude théorique dans ces domaines nécessite l'utilisation des équations non linéaire de base comme les équations de Maxwell. Cette dernière traite les problèmes de électrostatique qui sont généralement difficiles à résoudre. C'est pour cela que la résolution de ces équations nécessite les méthodes de calculs numériques.

Parmi les méthodes numériques qui existent, La méthode choisie pour les calculs que nous avons réalisés dans ce mémoire est la méthode des éléments finis, elle doit son nom à son principe lui même. Le choix de cette dernière est lié d'une part à la complexité de la géométrie du système et d'autre part à sa combinaison simple avec la méthode des caractéristiques qui permet l'évaluation de la densité de la charge d'espace dans le domaine considéré. Nous appliquerons cette méthode pour déterminer le champ électrique et la densité de courant à partir de l'évaluation de la densité de la charge d'espace lors d'une décharge couronne mono polaire.

L'effet couronne est une décharge électrique entraînée par l'ionisation du milieu entourant un conducteur, elle se produit lorsque le potentiel électrique dépasse une valeur critique mais les conditions ne permettent pas la formulation d'un arc. Une décharge de couronne se produit lorsqu'un courant continu ou non, se crée entre deux électrodes portées en haut potentiel et séparées par un fluide neutre, en générale l'air, par ionisation de ce fluide. Un plasma est alors crée et les charges électriques se propagent. Lorsque le champ électrique en un point du fluide est suffisamment grand, le fluide s'ionise autour de ce point et devient conducteur.

En particulier, si un objet chargé possède des points ou des coins, le champ électrique y sera plus important qu'ailleurs, c'est là en général, que se produira une décharge couronne, le phénomène tendra à se stabiliser de lui-même puisque la région ionisée devenant conductrice, la pointe aura apparemment tendance à disparaître. Les ponctuelles chargées se dissipent alors sous l'effet de la force électrique et se

Introduction générale

neutralisent en contact d'un objet de charge inverse. Les décharges couronnes se produisent donc en générale entre une électrode de rayon de courbure faible (un défaut du conducteur formant une pointe par exemple) tel que le champ électrique à ses environ soit suffisamment important pour permettre la formulation d'un plasma, et une autre de rayon de courbure important (une plaque métallique ou la terre).

La décharge de corona présente des aspects nuisibles comme les pertes en puissance dans le transport d'énergie électrique, les perturbations radiophoniques, l'apparition de phénomène corrosion, dégradation des isolants d'origine etc.

Plusieurs études ont été consacrées à l'étude du phénomène de décharge couronne. Les études ont été pontées sur les différents mécanismes de développement de la décharge et en particulier sur le seuil de son apparition. Les solutions théoriques des équations gouvernant la décharge n'existent que pour certaines configurations présentant la symétrie de révolution telles que le fil cylindre, sphère -sphère et plan-plan. Pour les systèmes qui ne présentent pas de symétrie de révolution, la solution exacte des équations décrivant la décharge reste très difficile à obtenir malgré les progrès modernes dans les techniques de calcul numérique. Les équation constituant le modèle mathématique sont les équations de Poisson et de la continuité de courant.

Notre travail est présenté en quatre chapitres, le premier chapitre est consacré aux généralités sur la décharge corona en étudiant la théorie de la décharge de Townsend et les différents travaux pour la détermination des paramètres du mécanisme du développement de la décharge. Nous allons aussi détailler les différents modes de décharge.

Dans le deuxième chapitre, nous allons présenté une étude théorique sur la mesure des paramètres de l'effet couronne par l'utilisation de la sonde polarisée de Tassicker. Cette partie est basée principalement sur les appareils du champ plus utilisés tel que la sonde polarisée et les techniques de mesure.

Tend que le troisième chapitre, est consacré à la présentation de la méthode des éléments finis. Qui est devenue indispensable dans la ponoplie de l'ingénieur. Nous

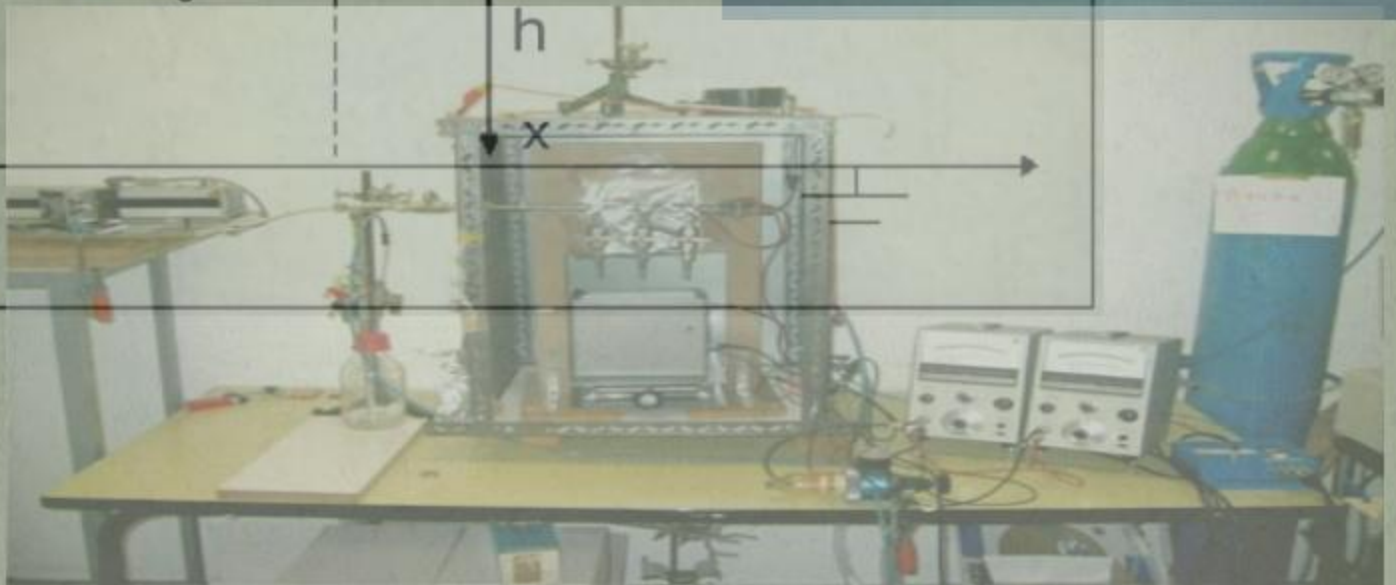
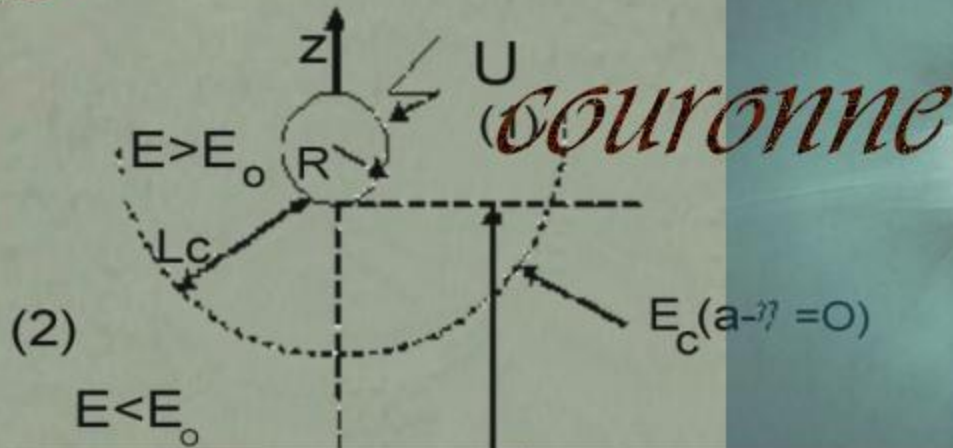
Introduction générale

nous placerons surtout dans le domaine de l'électrostatique. Le fondement de cette méthode est basé sur la discrétisation d'un espace d'approximation pour définir une fonction approchée.

Dans le quatrième chapitre, nous avons rapporté les modèles numériques que nous avons construit pour la résolution des équations gouvernant la décharge couronne en géométrie fil-plan. La modélisation numérique permet le traitement des paramètres ajustables. Les mesures réelles permettent aussi de comparer les résultats de ces paramètres.

02 Chapitre 01

Généralités sur la décharge



La vie est une chance, saisis-la.

La vie est beauté, admire-la.

La vie est béatitude, savoure-la.

La vie est un rêve, fais-en une réalité.

I.1- Introduction :

L'effet couronne, phénomène aujourd'hui bien connu, se manifeste sous forme d'une gaine lumineuse bleuâtre qui apparaît autour d'un fil mince, lorsque celui-ci est porté à un potentiel suffisant. Il rappelle le halo lumineux visible à la périphérie du soleil, au moment des éclipses, et qui lui a donné son nom.

Du point de vue physique et électrique, ce phénomène est dû à l'ionisation de l'air, dès que le champ électrique régnant au voisinage immédiat du conducteur devient suffisant. Lorsque l'on utilise des conducteurs de plus gros diamètre, comme ceux qui équipent les lignes aériennes, on constate que la gaine lumineuse évolue en décharges discrètes que les spécialistes ont coutume d'appeler « aigrettes » ou « effluves ».

On peut remarquer ici, que ce phénomène se manifeste aussi dans des conditions naturelles, en particulier à l'approche d'un orage : sous l'effet de l'intense champ électrique généré par les charges électriques du nuage orageux, il se forme au sommet de toutes les pointes ou aspérités (mâts, paratonnerres, pics montagneux...) des effluves ou aigrettes, accompagnées d'un crépitement caractéristique. Les alpinistes connaissent bien ce bruit, qu'ils appellent « bruit d'abeille » [1].

Lors de l'effet couronne, l'énergie dissipée est à l'origine de pertes électriques et les impulsions électriques associées aux aigrettes entraînent des perturbations radioélectriques.

Par l'analyse des résultats de mesures antérieures sur de nombreux types de conducteurs, on a mis en évidence l'influence des principaux paramètres régissant l'amplitude des phénomènes couronne. Dans leur ordre de mise en évidence, ce sont : le champ électrique superficiel du conducteur, son diamètre, son état de surface et la densité de l'air environnant.

I.2- Définition de l'effet couronne:

On appelle « décharge de couronne » l'ensemble des phénomènes de décharge autonome qui précède le claquage. Les décharges de couronne apparaissent surtout à pression élevée ($>20\text{mmHg}$) dans un champ électrique non-uniforme. Prenons l'exemple d'un conducteur filiforme placé suivant l'axe d'un cylindre relié à la masse, si l'on applique un potentiel élevée au conducteur central, le champ électrique est maximale à la surface du conducteur. Il décroît ensuite très rapidement avec la distance radiale. Lorsque le champ appliqué à la surface du conducteur dépasse une valeur de seuil, l'ionisation apparaît au voisinage immédiat du conducteur. Dans l'obscurité, la décharge partielle autour du

conducteur est visible à l'œil nu sous forme de couronnes lumineuses. C'est la raison pour laquelle le phénomène est appelé « effet de couronne »[2].

I.3- Mécanisme :

I.3.1- Au niveau macroscopique :

Une décharge de Corona se produit lorsqu'un courant, continu ou non, se crée entre deux électrodes portées à un haut potentiel et séparées par un fluide neutre, en général l'air, par ionisation de ce fluide. Un plasma est alors créé et les charges électriques se propagent en passant des ions aux molécules de gaz neutres.

Lorsque le champ électrique en un point du fluide est suffisamment grand, le fluide s'ionise autour de ce point et devient conducteur. En particulier, si un objet chargé possède des pointes ou des coins, le champ électrique sera plus important qu'ailleurs (c'est le pouvoir des pointes), c'est là en général, que se produira une décharge de corona : le phénomène tendra à se stabiliser de lui-même puisque la région ionisée devenant conductrice, la pointe aura apparemment tendance à disparaître. Les particules chargées se dissipent alors sous l'effet de la force électrique et se neutralisent au contact d'un objet de charge inverse. Les décharges de corona se produisent donc en général entre une électrode de rayon de courbure faible (un défaut du conducteur formant une pointe par exemple) tel que le champ électrique à ses environs soit suffisamment important pour permettre la formation d'un plasma, et une autre de rayon de courbure important (une plaque métallique ou la terre).

Une décharge de corona peut être positive ou négative selon la polarité de l'électrode de faible rayon de courbure. Si elle est positive, on parle de corona positif, sinon, de corona négatif. Du fait de la différence de masse entre les électrons (négatifs) et les ions (positifs), la physique de ces deux types de corona est radicalement différente. Par exemple, une décharge de corona produit de l'ozone quelque soit sa polarité, mais un corona négatif en produit beaucoup plus qu'un corona positif.

Si la géométrie du conducteur et la valeur du champ sont tels que la région ionisée s'étende au lieu de se stabiliser, le courant peut finir par trouver un chemin jusqu'à l'électrode inverse, il se forme alors des étincelles ou un arc électrique [3].

I.3.2- Au niveau microscopique :

Les décharges de corona, qu'elles soient positives ou négatives ont des mécanismes en commun :

1. Un atome ou une molécule neutre du fluide environnant l'électrode est ionisé par un événement extérieur (par exemple par interaction avec un photon), un ion positif et un électron sont créés.
2. Ces deux particules étant de charge inverses, le champ électrique crée sur chacune d'elle une force électrique égale en norme mais de sens opposé et les sépare, empêchant leur recombinaison et leur apportant une énergie cinétique importante.
3. L'électron étant de masse beaucoup plus faible que l'ion, il est fortement accéléré, et entre en collision avec des atomes neutres, ce qui tend à créer de nouvelles paires électrons/ions positifs, qui suivront le même processus. On parle d'effet d'avalanche.
4. Des ions ainsi créés sont attirés par la seconde électrode et permettent ainsi l'établissement d'un courant.

I.3.3- Propriétés électriques :

Le courant entraîné par une décharge de corona peut se déterminer en intégrant la densité de courant à la surface du conducteur. La puissance dissipée est le produit de ce courant et de la tension entre les deux électrodes.

I.4- Aspect physique du phénomène en tension alternative :**I.4.1- Nature de l'effet couronne :****I.4.1.1- Avalanche électronique :**

Au voisinage d'un conducteur d'une ligne électrique, les surfaces équipotentielles ont une très forte courbure, et le champ électrique décroît très rapidement en fonction de la distance au conducteur. L'avalanche électronique ne peut se produire que si le champ à la surface du conducteur atteint une valeur supérieure à 30 kV/cm, d'autant plus grande que le rayon du conducteur est petit. Ce champ superficiel est appelé champ critique.

En polarité négative du conducteur, l'avalanche électronique se développe depuis le conducteur vers l'extérieur, elle s'arrête à une certaine distance où le champ n'est plus suffisant pour assurer l'effet multiplicateur. Ce champ est de l'ordre de 26 kV/cm. Le phénomène d'ionisation est alors limité à une couronne d'une épaisseur bien définie.

En polarité positive du conducteur, au contraire, l'avalanche électronique prend naissance dans l'espace voisin, et se développe vers le conducteur. Les électrons sont absorbés par celui-ci, laissant derrière eux un nuage d'ions positifs, beaucoup moins mobiles, tout se passe comme si le conducteur était prolongé par une pointe positive, qui permet ensuite la formation d'une nouvelle avalanche un peu en avant de la précédente.

1.4.1.2- Modes d'émission des charges- Aigrettes :

Les premières expériences sur l'effet couronne, qui datent du début du siècle, étaient faites à l'aide de fils minces, de quelques millimètres de diamètre. Portés à une tension suffisante, il se forme autour d'eux une gaine lumineuse, de couleur bleue violette, dont l'épaisseur augmente avec la tension. C'est la présence de cette lueur qui a donné naissance à l'expression, maintenant universellement employée, d'effet couronne ou corona. Mais lorsque le diamètre du fil croît, pour atteindre les dimensions des câbles utilisés sur les lignes de transport d'énergie, l'effet couronne perd cet aspect de gaine lumineuse uniforme, il se discrétise en lueurs localisées désignées sous le nom général d'aigrettes.

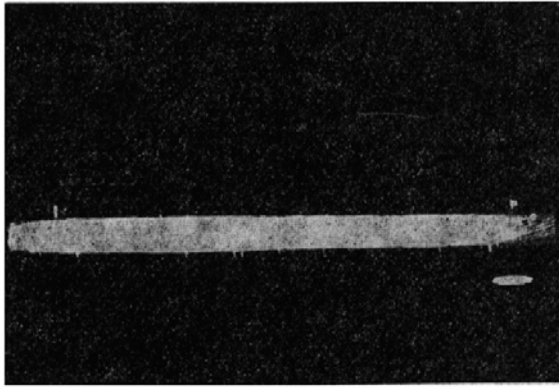
Il existe un grand nombre de modes d'émission de charges dus à l'ionisation des gaz, pouvant prendre l'aspect d'émission continue ou d'émission impulsionnelle, et constituant autant de variétés d'aigrettes.

En ce qui concerne l'étude des pertes et des perturbations, 3 modes d'émission principaux sont à retenir :

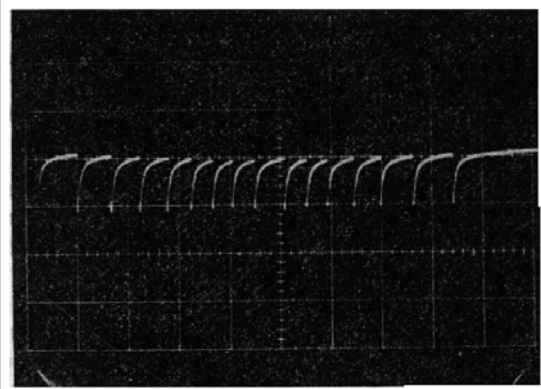
- Petites aigrettes négatives (impulsions de Trichel) : en général, le champ critique est légèrement plus faible en polarité négative qu'en polarité positive. Lorsque ce champ critique négatif est atteint au sommet d'une aspérité du conducteur, l'observation d'oscillographe montre l'apparition de trains d'impulsions.

Les impulsions sont d'autant plus petites et plus serrées que la pointe est fine, leur amplitude est relativement faible (de l'ordre du milliampère) mais elles sont caractérisées par des fronts de montée très raides, de l'ordre de la dizaine de nanosecondes. A ces impulsions, dites impulsions de Trichel. Le mécanisme de ces impulsions est du type avalanches négatives (figure I.1).

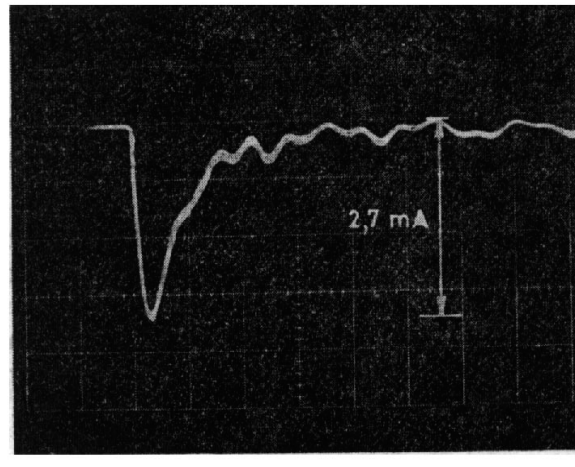
Zone de conductivité d'Hermstein : c'est un mode d'émission en polarité positive qui a la propriété d'être continu. Il a lieu généralement, en tension alternative,



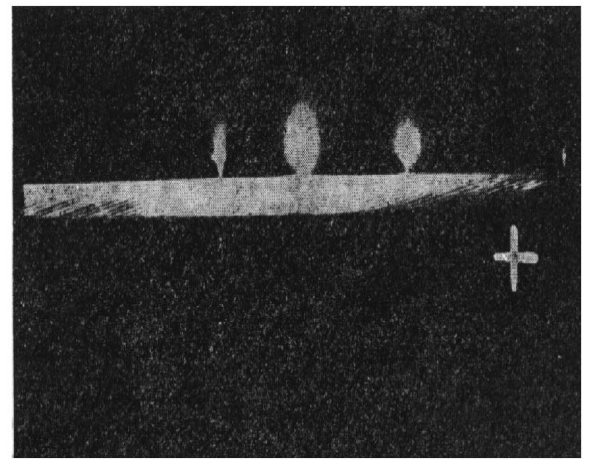
(a) impulsions de Trichel (aigrettes négatives)
à la surface d'un conducteur toronné



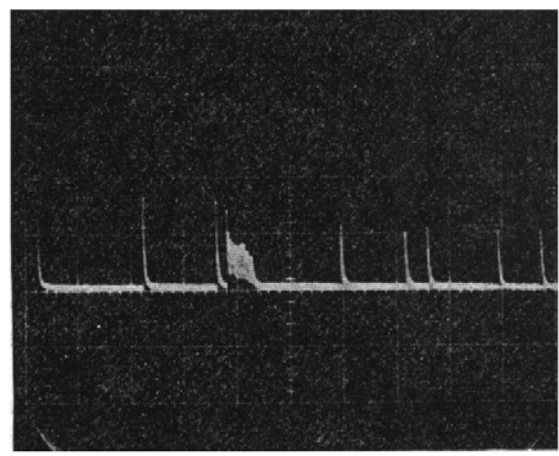
(b) train d'impulsions (vitesse de
balayage 0,2 ms/carreau)



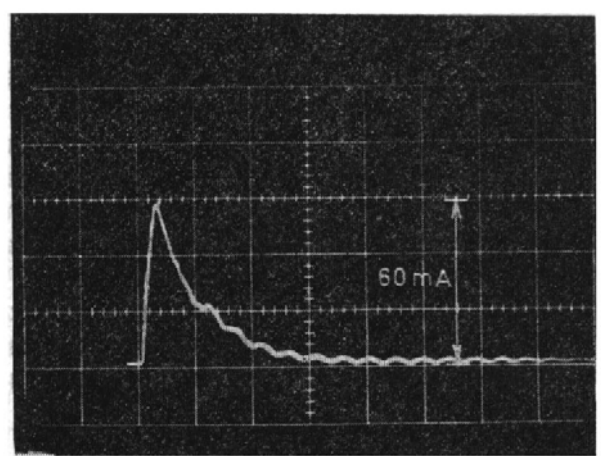
(c) détail d'une impulsion (vitesse de
balayage 50 ns/carreau)



(d) impulsions de prédécharge (aigrettes 50 de
positives) à la surface d'un conducteur toronné



(e) train d'impulsions (vitesse de
balayage 0,2 ms/carreau)



(f) détail d'une impulsion (vitesse de
balayage 200 ns/carreau)

Figure I.1 : Les différentes formes des aigrettes

immédiatement au-dessus du seuil positif. Sa participation est importante dans la formation des pertes couronne mais négligeable dans la formation des perturbations radioélectriques.

- Grandes aigrettes positives : le mode d'émission impulsionnel apparaît au-delà de la zone continue d'Hermstein, pour des champs positifs un peu supérieurs. Le courant d'émission prend la forme d'une série irrégulière d'impulsions de grande amplitude. Visuellement, elles se présentent comme des aigrettes très lumineuses, dont la base est attachée à une aspérité du câble, et qui se propagent de façon arborescente à des distances de plusieurs centimètres. Ce sont ces grandes aigrettes positives qui sont responsables des perturbations radioélectriques. Elles s'accompagnent également, du point de vue acoustique d'un claquement sec dont la multiplication engendre le bruit d'abeilles bien connu au voisinage des lignes à haute tension.

1.4.2- Seuil critique de l'effet couronne :

Lorsqu'un conducteur est soumis à une tension croissante, le champ critique de l'effet de couronne est défini par l'apparition brusque d'une importante conductivité de l'air dans son voisinage immédiat. Selon la formule de Peek, pour une configuration cylindrique, l'apparition de l'effet de couronne est en fonction du champ superficiel, du rayon du conducteur, et de la densité de l'air selon la relation suivante :

$$E_c = E_p \delta \left(1 + \frac{K}{\sqrt{\delta \cdot R}} \right) \quad (I)$$

.1)

Où: E_c est le champ critique, en KV/cm,

E_p est le champ superficiel, $E_p = 30$ KV/cm,

K coefficient, $K=0.308$,

R est le rayon du conducteur, en cm,

δ est la densité relative de l'air $= 3.92P / (273+T)$, ($\delta=1$ pour $P=76$ cm Hg et $T=25^0$),

T est la température, en 0 C,

P est la pression de l'air, en cm Hg,

Cette formule, reliée à l'effet de couronne, montre un effet non négligeable de la température ambiante sur le champ critique E_c .

I.5- Modes de décharge par effet de couronne :

Nous décrivons ci-dessous, les différents modes de décharge de couronne dans l'air à pression atmosphérique selon la nature de la tension appliquée.

I.5.1- Effet de couronne en tension continu positive :

Les électrons libres existant dans l'air se déplacent vers l'anode tout en produisant des avalanches par ionisation secondaire. Puisque ces électrons se déplacent vers une région où l'intensité du champ croît rapidement, la multiplication des charges devient plus facile. C'est la raison pour laquelle le champ de seuil de l'effet de couronne est légèrement plus petit en tension positive qu'en tension négative.

On observe dans la plupart des configurations, trois principaux modes de décharge à l'anode: les impulsions au début du phénomène (positive onset pulses), la lueur de Hermstein (Hermstein glow) et les effluves précédant la disruption (positive breakdown streamers). Il est à remarquer qu'au début du phénomène, dans certaines configurations d'électrodes, on peut observer des impulsions plus faibles que les impulsions au début, appelées en anglais « corona burst ». ces impulsions proviennent des effluves latéraux dont la lueur forme une couche mince très proche de l'anode.

Dès que la tension appliquée dépasse la valeur critique de l'effet de couronne, les effluves ou les streamers se forment avec un canal radial fortement ionisé et avec de multiples dérivations de moindres intensités. Ces dernières se situent dans une zone où le champ électrique est relativement modéré.

La lueur de Hermstein est une décharge continue avec une anode sphérique. Cependant avec une anode effilée les streamers continuent à apparaître sous forme d'impulsions mais de façon erratique.

Après la zone « morte » de la lueur de Hermstein, si la tension appliquée augmente, on se dirige vers la disruption. Cependant, juste avant le claquage, des canaux d'ionisation devront être formés. Ce sont des streamers qui précèdent le claquage. On explique la formation de ces streamers par la non-uniformité de la zone ionisée de Hermstein. En certains endroits, cette zone d'ionisation est plus forte, ce qui est à l'origine des streamers positifs qui se forment de la même façon que les streamers au début de

phénomène. La seule différence consiste à ce que les streamers précédant la disruptive se propagent jusqu'à la cathode pour former un ou plusieurs canaux conducteurs de l'anode à la cathode.

1.5.2- Effet de couronne continu négative :

Dans le cas de la décharge à la cathode, les électrons sont contenus à la base de la flèche, en route vers l'anode, c'est-à-dire vers les régions où le champ est de moins en moins intense. C'est probablement la raison pour laquelle les branches des effluves négatifs sont divergentes. Dans le cas de la décharge à l'anode, les électrons se dirigent vers l'anode, une région où règne un champ électrique d'intensité croissante. Ils suivent donc à peu près les lignes de champ. Nasser [4] a montré que les branches des effluves des décharges à l'anode sont convergentes.

Sur les protubérances sphériques, il y a aussi des effluves latéraux qui couvrent la surface de l'anode, ils sont causés par des charges négatives très proches de l'anode. Ces charges préviennent le développement des effluves radiaux, car elles réduisent le champ électrique au voisinage de l'anode.

Si l'on augmente la tension appliquée, la fréquence de répétition des impulsions créées par les effluves radiaux augmente jusqu'à une valeur critique, au-delà de laquelle la charge d'espace négative arrête ce mode de décharge et un autre mode de décharge sans impulsions aura lieu. Cette transition est plus nette avec une protubérance asphérique.

1.5.3- Effet de couronne en tension alternative :

Lorsque la fréquence du courant alternatif est de 60 Hz, la durée de chaque alternance est de 8.33 ms. Par ailleurs, la disruptive se complète normalement en un temps de 10^{-6} à 10^{-8} s. On voit donc, que lorsque la disruptive a lieu, le changement de polarité d'un champ électrique alternatif ne peut plus interrompre le phénomène.

En ce qui concerne la différence des influences des champs de deux types (alternatifs et continus) sur l'ionisation, cela dépend de la distance de décharge. La distance maximale $d_{\max}$ entre les électrodes pour laquelle les charges produites pendant la première alternance sont encore évacuées avant que la polarité du champ soit inversée, est égale :

$$d_{\max} = \frac{\xi E_0}{2\pi f} \quad (\text{I.2})$$

Où : ξ est un coefficient, en $\text{cm}^2 / \text{V.s}$

E_0 est le champ de seuil de l'effet couronne, en V/cm

f est la fréquence, en $1/\text{s}$

Si $d > d_{\max}$, les ions positifs ne réussissent pas à rejoindre la cathode avant le changement de la polarité, même les ions négatifs produits pendant l'alternance positive n'atteignent pas l'électrode chargée positivement avant que la polarité soit inversée. Ces ions, étant repoussés cette fois par l'électrode chargée négativement, se dirigent vers la région dont le champ est de plus en plus faible, ils ne seront plus évacués. L'importante quantité de charges d'espace en tension alternative encourage les modes de décharge sans impulsion (Lueur négative et lueur de Hermstein) se produire à des tensions plus faibles que celles observées en tension continue. Il y a donc très peu de streamers [2].

1.6- Processus de la décharge de couronne :

Il existe toujours dans l'air un certain nombre d'électrons libres, créés par rayonnements cosmiques ou dus à l'ionisation naturelle par les substances radioactives dans la terre. Lorsque ces électrons sont soumis à un champ électrique élevé, ils sont accélérés, et si le champ est assez intense, l'énergie qu'ils acquièrent devient suffisante pour provoquer l'ionisation des molécules neutres qu'ils heurtent. Il se crée alors de nouveaux électrons libres, lesquels soumis au même champ vont également ioniser des molécules et ainsi de suite, le processus prend une allure d'avalanche dite de Townsend. Pour qu'une telle avalanche puisse se maintenir, il faut qu'elle atteigne une taille critique, et que le champ ait une valeur suffisante.

1.7- Théorie de TOWNSEND :

La théorie de Townsend [5] est basée sur la multiplication des électrons par ionisation du gaz inter électrodes, il peut exister dans ce gaz, en absence de tout champ électrique appliqué, des particules chargées (électrons) produite soit par des mécanismes naturels, tel que les rayonnements cosmiques ou radioactifs, soit par des mécanismes artificiels, par exemple en bombardant la surface de la cathode avec une source de rayonnement ultraviolet afin d'en extraire des électrons.

Considérons un tube à décharge à basse pression, où les électrodes planes sont séparées par une distance d (fig. I.2). Lorsqu'on applique un champ électrique E suffisant entre les électrodes, les électrons libres sont accélérés, ils peuvent ainsi acquérir une énergie cinétique supérieurs à l'énergie d'ionisation de la molécule ou l'atome gazeux. Un électron est arraché de l'atome, qui accéléré par le champ électrique, peut ioniser à son tour d'autres atomes ou molécules, ce processus continu, évolue pour produire une multiplication du nombre d'électrons, nous parlons alors d'avalanche électrique.

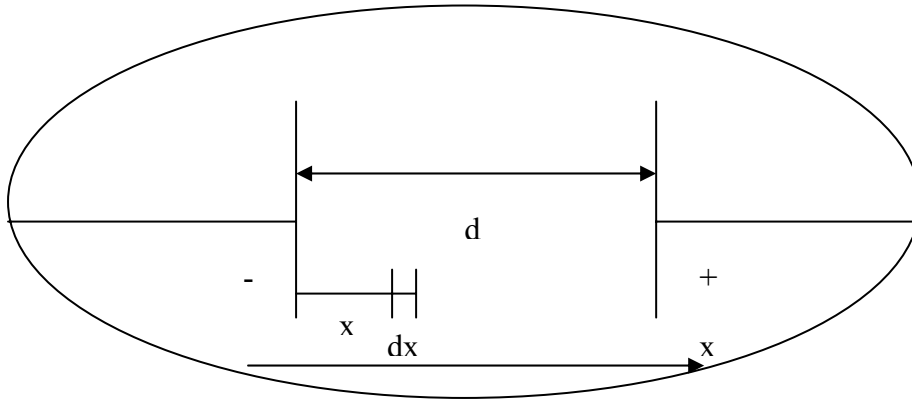


Figure (I .2): Tube à décharge.

Supposons qu'il se soit formé $n(x)$ électrons à une distance x de la cathode, alors ils vont produire $dn(x)$ électrons sur une distance dx :

$$dn(x) = n(x) \cdot \alpha \cdot dx \quad (\text{I.3})$$

Le facteur α est appelé premier coefficient de Townsend, il exprime le nombre moyen d'ionisations par centimètre de parcours d'un électron soumise au champ électrique E . la valeur de α , pour un gaz donné, dépend de la valeur du champ réduit E/P , exprimant le rapport du champ électrique à la pression. Dans le cas d'un champ homogène le coefficient α reste constant.

En intégrant l'équation ci-dessus nous obtenons :

$$n(x) = n_0 \cdot e^{(\alpha \cdot x)} \quad (\text{I.4})$$

n_0 est le nombre d'électrons initiaux issus de la cathode. Le nombre d'électrons atteignant l'anode est donné par la relation :

$$n(d) = n_0 \cdot e^{(\alpha \cdot d)}$$

La charge collectée à l'anode par unité de temps vaut :

$$e \cdot n(d) = e \cdot n_0 \cdot e^{(\alpha \cdot d)}$$

Le courant de décharge est donné par :

$$i = i_0 \cdot e^{(\alpha \cdot d)} \quad (I.5)$$

L'étude expérimentale du courant i effectuée par Townsend en fonction de la distance d , montre que ce courant augmente plus rapidement que prévu par la relation (I.5) ceci est dû au phénomène d'ionisation secondaire se produisant près de la cathode. En effet, des ions positifs dérivent vers la cathode sous l'effet du champ électrique, ils peuvent ainsi acquérir une énergie cinétique suffisante pour arracher des électrons par bombardement de la surface cathodique. Ce phénomène est caractérisé par un coefficient γ appelé deuxième coefficient de Townsend. Ce coefficient dépend de la nature du gaz inter électrodes et particulièrement du matériau constituant la cathode.

Les n_0 électrons issus de la cathode, produisant, sur la distance d , $n_0(e^{(\alpha \cdot d)} - 1)$ paire d'ions électrons. Ces ions positifs sont libérés $\gamma \cdot n_0(e^{(\alpha \cdot d)} - 1)$ nouveaux électrons à la cathode qui se multiplieront à leur tour comme les électrons initiaux. Le nombre total d'électrons atteignant l'anode sera alors donné par :

$$n = n_0 \cdot \frac{e^{(\alpha \cdot d)}}{1 - \gamma(e^{(\alpha \cdot d)} - 1)} \quad (I.6)$$

Et le courant collecté à l'anode vaudra :

$$i = i_0 \cdot \frac{e^{(\alpha \cdot d)}}{1 - \gamma(e^{(\alpha \cdot d)} - 1)} \quad (I.7)$$

A partir de la relation (I.7), Townsend a établi un critère, appelé de claquage de Townsend, correspondant à l'annulation du dénominateur pour une distance critique de :

$$\gamma(e^{(\alpha \cdot dc)} - 1) = 1$$

La quantité $\gamma \cdot e^{(\alpha \cdot dc)}$ étant généralement très grande devant l'unité, le critère précédent peut s'écrire également sous la forme :

$$\gamma \cdot e^{(\alpha \cdot dc)} = 1 \quad \text{Où} \quad e^{(\alpha \cdot dc)} = 1/\gamma$$

Lorsque le champ électrique dans l'intervalle inter électrodes n'est plus uniforme, comme dans le cas des systèmes d'électrodes dissymétrique, le coefficient α n'est plus constant et le critère de claquage de Townsend s'exprime alors par la relation suivante :

$$\gamma \cdot \exp\left(\int_0^{dx} \alpha \cdot dx\right) - 1 = 1 \quad (I.8)$$

Il est à noter que certains gaz comportant des atomes à électronégativité accentuée tel le SF₆, peuvent capter un électron pour former un ion négatif. Ce phénomène est connu sous le nom d'attachement, phénomène caractérisé par un coefficient d'attachement électronique η s'opposant au processus α . En présence d'attachement, on définit un coefficient effectif d'ionisation $\bar{\alpha}$ qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\bar{\alpha} = \alpha - \eta$$

La théorie de Townsend fait intervenir tout l'intervalle inter électrodes. Elle prévoit à des pressions élevées, des temps de transition des charges beaucoup plus grands que le temps de la formation de la décharge. Ceci permet d'écarter le processus secondaire « γ » car les ions positifs sont freinés et leur énergie cinétique n'est plus suffisante pour extraire des électrons supplémentaires de la surface cathodiques. Les travaux de Fletcher [6] confirment la non validité de la théorie de Townsend pour les pressions élevées de gaz, en champ uniforme cependant, cette théorie conserve sa validité pour des valeurs de produit P.d inférieure à 200 torr cm.

La non validité de la théorie de Townsend aux pressions élevées conduit à la recherche d'une autre théorie améliorée, celle de la formation du Streamer [4].

I.8-Décharge couronne en géométrie file- plan :

Le système d'électrodes fil plan est constitué d'une électrode cylindrique, de faible rayon de courbure, tendue parallèlement à un hauteur h d'un plan mis à la terre figure (I .3). L'espace inter électrodes est répartie en deux zones délimitées par une frontière distante de L_c de la surface de l'électrode active. Sur cette frontière le champ électrique est égale au champ critique E_c du minimum d'ionisation correspondant à $\alpha - \eta = 0$.

La zone d'ionisation (1) est Caractérisée par une charge d'espace nulle, par contre la zone de dérive (2) est caractérisée par une charge d'espace non nulle. Lorsqu'une tension U de polarité positive, suffisante pour créer la décharge couronne, est appliquée à l'électrode active, celle-ci attire les électrons. Ces derniers ne peuvent ioniser le gaz inter électrodes qu'une fois qu'ils ont acquit une énergie cinétique suffisante dué au champ existant aux voisinage de cette électrode. Dans ce cas, le développement de l'ionisation du gaz par collisions électroniques commence à partir de la limite L_c en progressant vers l'électrode

active. Quand aux ions positifs engendrés dans la zone d'ionisation, ils dérivent vers l'électrode mise à la terre.

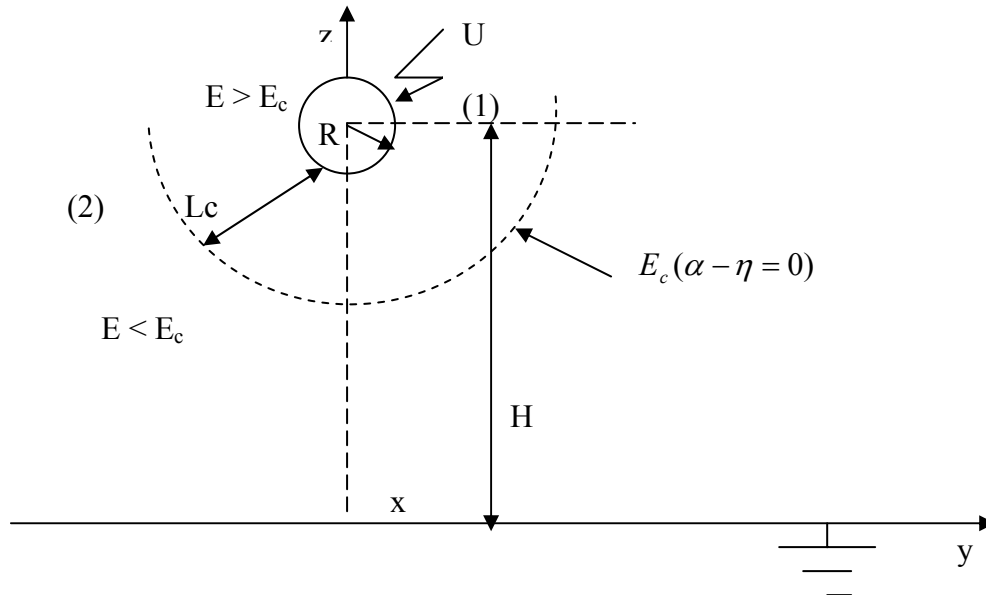


Figure 1.3 : Représentation schématisée d'une décharge couronne continue en géométrie fil-plan

Lors de la décharge couronne de polarité négative, les avalanches électroniques développent à partir de l'électrode active vers le plan. En dépassant la frontière L_c , les électrons ne peuvent plus ioniser le gaz en raison du champ électrique qui se trouve inférieur au champ critique du minimum d'ionisation E_c . Certains électrons vont s'attacher à des atomes ou molécules neutres. Quant aux ions positifs créés dans la zone d'ionisation, ils sont accélérés dans le fort champ vers l'électrode active et peuvent ainsi accentuer l'effet « γ ».

I.8.1-Champ seuil de la décharge couronne :

I.8.1.1- Travaux antérieurs :

L'étude du seuil d'apparition de la décharge couronne a fait l'objet de nombreuses études. Les travaux expérimentaux sur l'évaluation du seuil consistent généralement à

mesurer la tension seuil V_s à laquelle correspond un champ seuil E_s à la surface de l'électrode active. Pour l'évaluation de champ seuil E_s . On donne la formule suivante.

$$E_s = F(1 + \frac{G}{R^B}) \quad (I.9)$$

Où F , G et B sont des constantes et R est le rayon de l'électrode active.

Peek, en 1929, a proposé pour la première fois une loi empirique en géométrie cylindrique dans l'air en tension alternative. L'expression qu'il a établie est valable pour des rayons de l'électrode active allant de 1mm à quelques cm, et pour des pressions variables de quelques dizaines de torrs à quelques atmosphères.

Le coefficient F a été identifié la première fois par Waters et Strak en 1975 [7] comme étant la valeur du champ critique du minimum d'ionisation. à partir d'une représentation empirique de $(\alpha - \eta)$ en fonction du champ réduit E/P et de critère de claquage de Townsend, ces auteurs ont également établie, en géométrie cylindrique, une loi empirique pour la calcul du champ seuil.

Les travaux des divers auteur cités, reposent sur le critère de Townsend qui ne se justifié pas aux grandes distances inter électrodes, car le processus « γ » n'intervient pas. Les auteurs utilisent une représentation de $(\alpha - \eta)$ en fonction de E/P trop restrictive, et ou les valeurs utilisées sont celles de l'air sec. Ils font donc abstraction de l'humidité de l'air.

I.8.1.2- Théorie actuelle :

Le champ seuil de l'effet couronne peut être défini sous réserve d'une bonne représentation de $(\alpha - \eta)/p$ en fonction du champ réduit E/P et de calcul d'intégrale d'ionisation $\int (\alpha - \eta).dx$ par ailleurs, on doit tenir compte des paramètres physiques de l'air (humidité, pression et température).

Hartmann a proposé en 1984 [1] un modèle physico-mathématique pour le seuil de l'effet couronne est amélioré plus tard par une étude expérimentale développée avec les géométrie d'électrodes fil-cylindre et fil- plan [21,22]. Ce modèle est basé, d'une part, sur la notion de longueur critique L_c de l'avalanche, et d'autre part, sur une amélioration du critère de Meek. Il exprime qu'à la tête de l'avalanche près de l'anode, les électrons ne peuvent se multiplier en raison des champs E_s à la surface de l'anode et E_p dû à la charge d'espace en tête de l'avalanche qui s'opposent et dont la somme algébrique est égale au champ critique du minimum d'ionisation E_c .

$$E_s + E_p = E_c \quad (I.10)$$

En désignant par $2R$ le diamètre de l'électrode active, le champ seuil donné par le modèle s'exprime par :

$$E_s(R, \delta, H_a) = E_c(\delta, H_a) \left[1 + \frac{A_0}{2R} \left(\frac{2R \cdot \exp(a_0 / 2R) + z_0}{\delta} \right)^{B_0} f(H) \right]. \quad (I.11)$$

Avec :

$$f(H_a) = 1 + \theta \cdot \sqrt{H_a}$$

$$E_c(\delta, H_a) = E_c(1,0) \cdot \delta \cdot (1 + \alpha_H \sqrt{H_a})$$

$$\theta = 11.4 \cdot 10^{-3} (g / m^3)^{-1/2}; A_0 = 0.1088; B_0 = 0.59; z_0 = 17 \cdot 10^{-4} m, a_0 = 3 \cdot 10^{-7} m$$

$$E_c(1,0) = 24.68 KV / cm; \alpha_h = 16.03 \cdot 10^{-3} (g / m^3)^{-1/2}$$

La densité de l'air δ est donnée par l'expression suivante :

$$\delta = \frac{P}{760} \frac{293}{273 + T} \quad (I.12)$$

$\delta = 1$ pour $P=760$ mm Hg et $T=20^\circ C$.

Ce modèle physico-mathématique sur la généralisation de la loi de Peek et en pleine évolution.

I.8.2- Loi de Townsend (dans la géométrie fil plan) :

L'équation de base régissant le problème dans la zone de dérive si la mobilité ionique est supposée constante dérive de l'équation de Poisson et de l'équation de continuité du courant :

$$(\Delta^2 \phi)^2 + \Delta \phi \cdot \nabla(\nabla^2 \phi) = 0 \quad (I.13)$$

En géométrie cylindrique, l'intégrale de l'équation (I.13) dans la zone de dérive est simple. Une méthode utilisant les conditions aux limites a été décrite sous forme d'une loi classique par Townsend et développée ultérieurement par Thomson J.J et Thomson G.P:

$$1 = K \cdot \bar{\mu} \cdot V \cdot (V - V_s) \quad (I.14)$$

Où K est une constante dépendant de la géométrie des électrodes, $\bar{\mu}$ est la mobilité moyenne des ions dans la zone de dérive et V_s est la tension de seuil d'apparition de la décharge couronne.

En géométrie cylindrique :

$$K = \frac{8 \pi \varepsilon_0 \cdot \bar{\mu}}{R_1^2 \cdot \ln\left(\frac{R_1}{R}\right)}$$

Où R et R_1 sont respectivement les rayons des électrodes centrale et extérieure.

Pour la géométrie d'électrodes fil-plan, la constante K prend la forme suivante :

$$K = \frac{3 \cdot 12 \cdot \pi \varepsilon_0 \cdot \bar{\mu}}{h^2 \cdot \ln\left(\frac{2h}{R}\right)} \quad (I.15)$$

La mesure des caractéristiques courant-tension permet de déterminer la tension de seuil V_s de la décharge couronne et approximativement la tension V_d de sa transition vers l'arc.

1.9- Problèmes liés aux décharges de corona :

Les décharges de corona peuvent produire des bruits audibles et des perturbations sur les fréquences radio, en particulier à proximité des lignes à haute tension. Elles représentent également une perte de puissance. Enfin, les réactions qu'elles provoquent dans l'atmosphère pourraient avoir un impact sur la santé. C'est pourquoi les installations de transmission électrique sont conçues pour minimiser la formation des décharges de corona. Les décharges de corona sont particulièrement à éviter dans :

- les installations de transmission électrique où elles provoquent une perte d'énergie et du bruit.
- la plupart des équipements électriques : transformateurs, machines électriques (aussi bien générateurs que moteurs), etc. où elles endommagent progressivement les isolants amenant à une détérioration prématurée des équipements,
- toutes les situations nécessitant une tension importante mais où la production d'ozone doit être minimale.

1.10.1- Réduction de l'effet corona sur les lignes électriques

La réduction de l'effet corona sur les lignes à haute tension par des mesures spécifiques n'est en général nécessaire que quand le niveau de tension de la ligne dépasse 345 kV. Au delà de la réduction des nuisances aux populations, le coût économique des pertes en ligne par effet Corona peut justifier à lui seul de prendre des mesures correctives. Ces mesures sont de 2 types :

- utilisation de conducteurs de gros diamètre, pour limiter le champ électrique à la surface. Cette mesure est souvent inefficace, et rarement économiquement justifiée, car l'effet de peau rend souvent inefficace le choix de conducteurs de grosse section ;
- utilisation de faisceau de conducteurs (typiquement 2 conducteurs ou plus en 400 kV, 3 conducteurs ou plus en 500 kV).

Le choix du nombre de conducteurs d'une ligne électrique se fait donc en fonction du courant à transiter, des conditions climatiques, des effets de peau et corona, et bien sûr des aspects économiques. Un critère simple permettant de limiter l'effet corona sur les lignes électriques consiste à s'assurer que le champ superficiel sur le conducteur ne dépasse pas une valeur de l'ordre de 17 kV/cm [3].

1.10.2- Réduction de l'effet Corona dans les postes électriques

Dans les postes électriques haute tension, les considérations précédentes restent valables. L'aspect de perturbations sur les fréquences radio devient critique, en raison de la présence d'équipements électriques sensibles. Les appareils HTB (sectionneur, Disjoncteur à haute-tension, parafoudre, ...) doivent être conçus et testés pour limiter ces perturbations radioélectriques liées à l'effet corona.

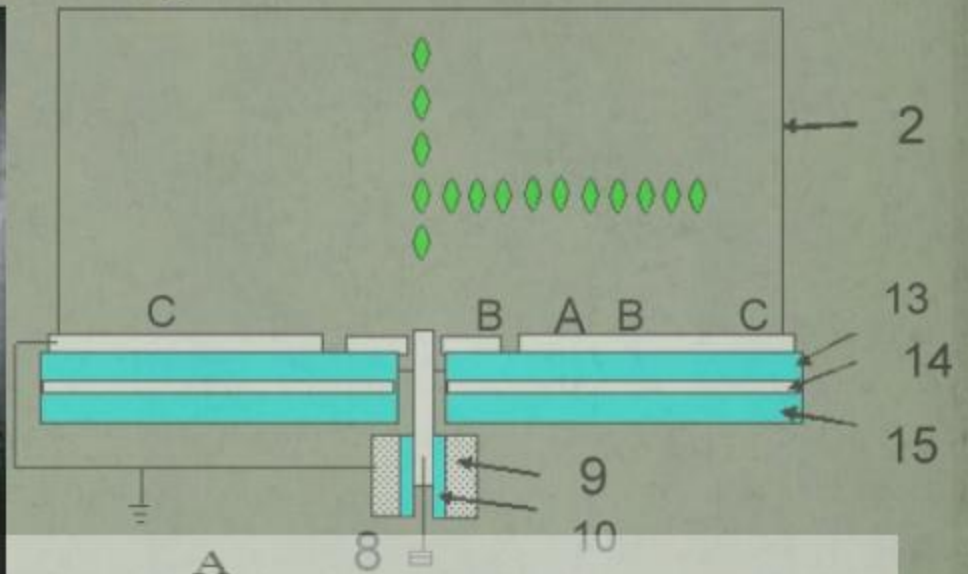
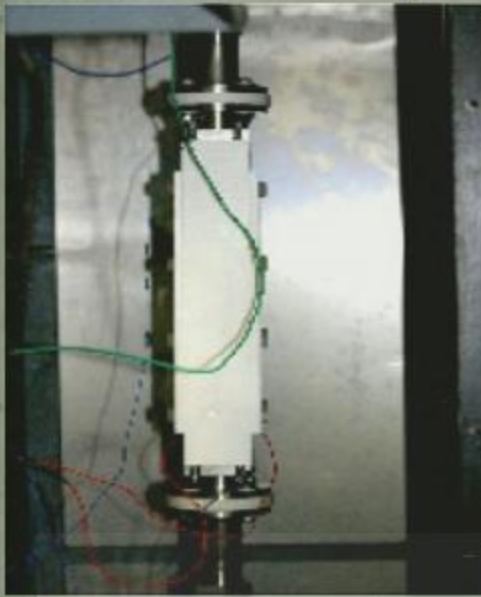
1.11- Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté un phénomène très connu dans notre domaine c'est le phénomène de l'effet couronne, et nous avons remarqué que ce phénomène est dû à l'ionisation de l'air au tours d'un conducteur parcouru par une très haute tension. Les paramètres influençant sur ce phénomène sont: l'air environnent le conducteur, le diamètre de conducteur, la tension appliquer sur le conducteur....etc. Il y a plusieurs applications commerciale et industrielle de la décharge couronne telle que:

- Production d'ozone
- Filtrage des particules contenues dans l'air (système d'air conditionné)

- Destruction de particules organiques contenues dans l'atmosphère : pesticide, solvant.
- Traitement de surface de certains polymères
- Photocopieur

03 Chapitre 02



*Mesure du champ électrique
par la sandede tassicker*

*Entrevois la défaite, et l'échec sera
ta récompense. Pense et imagine
le succès, et tu réussiras. C'est
d'ailleurs là ta plus grande liberté,
toi seul as le pouvoir de choisir tes pensées.*

II .1- Introduction:

Les ions positifs produits dans la zone d'ionisation lors de la décharge couronne positive en géométrie fil- plan, dérivent vers le plan et forment ainsi une charge d'espace mono polaire. La présence de cette charge d'espace au voisinage du frontière se révèle être une difficultés supplémentaire lorsqu'on veut mesurer le champ électrique. L'acuité de cette difficulté apparaît lorsque l'on sait qu'une mesure précise doit distinguer la charge induite de la charge conduite.

La mesure du champ électrique, à l'instar de toutes les mesures physiques, n'est pas sans poser de nombreux problèmes. La mesure de ce champ à proximité d'une frontière conductrice, que celui-ci soit dû à des charges d'espace ou d'autres conducteurs chargés peut être effectuée à l'aide de divers appareils qui sont les machines à champ ou les sondes à champ statique. Parmi tous les dispositifs utilisés pour la mesure du champ électrique, il existe un qui revêt une importance particulière, ce dispositif est connu sous le nom de sonde polarisée de Tassicker [8].

Les sondes polarisées sont des simples capteurs, de forme circulaire ou linéaire, incorporés dans un même niveau de surface dans une électrode mise à la terre et sur laquelle on veut mesurer le champ électrique. Leur principe est introduit par Tassicker en 1974 sur un modèle de forme circulaire et développé ultérieurement par Selim et Waters [9]. Une configuration linéaire de la sonde polarisée, mieux adaptée à l'étude des géométries d'électrodes fil-cylindre et fil-plan, est introduite récemment pour mesurer le champ électrique à la surface de l'électrode mise à la terre lors de la décharge couronne.

II. 2- Machines à champ :

Historiquement, ce sont les premiers dispositifs utilisés pour mesurer les champs électriques. Leur mise en œuvre était dictée par le besoin de mesurer le champ électrique terrestre à des fins d'études météorologique. Ces machines à champ existent sous plusieurs formes, elles sont conçues pour la mesure continue du champ en utilisant des capteurs mécaniques mobiles. Le principe de la méthode basé sur la mesure de la charge induite à la surface conductrice des capteurs, alternativement masqués et exposée au champ électrique à mesurer. Les machines à champ les plus connues sont le moulin à champ et le fluxmètre électrostatique.

II.2.1- Moulin à champ :

Le moulin à champ est composé d'une partie supérieure tournante appelée rotor, constituée de pales plates ainsi que d'une partie fixe appelée stator de forme géométrique souvent identique à celle du rotor, figure (II.1). Le stator est relié à un appareil permettant la mesure du signal, le rotor étant directement relié à la masse.

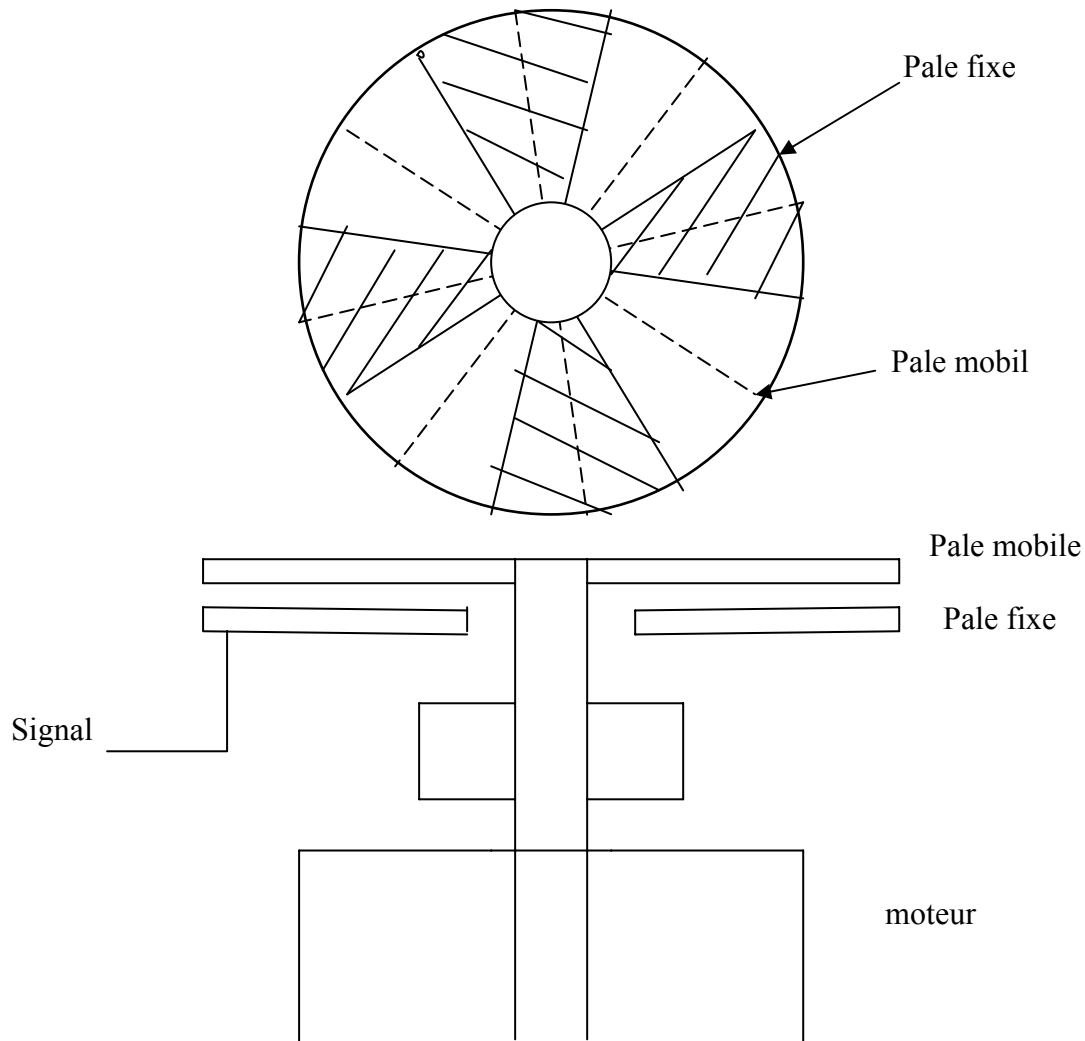


Figure II.1: schéma d'un moulin à champ

Lors du fonctionnement du moulin à champ, les pales tournantes exposent et masquent alternativement les capteurs statiques du champ électrique à mesurer. Le signal ainsi collecté peut être une tension alternative ou continue par intermittence.

II.2.2- Le fluxmètre électrostatique :

Le fluxmètre électrostatique est à l'origine d'un moulin à champ mais avec la partie supérieure fixe et la partie inférieure (capteurs) tournante. Si cet appareil présente un sérieux avantage au niveau de la perturbation dans la charge d'espace à proximité, il présente également un inconvénient majeur du fait que la collecte du signal a lieu sur sa partie mobile.

Ce genre d'appareil se rencontre généralement sous deux formes distinctes :

- a) La première a été développée par Mathias [10]. Cette forme avait ses deux parties constituées de deux demis- cylindres fondus dans un plan diamétral. Le cylindre tourne autour de son axe placé horizontalement pour mesurer un champ de sens vertical. Les charges induites sur chacun des deux demis- cylindres varient sinusoïdalement dans le temps avec un déphasage de 180 degrés. En reliant les deux demis- cylindres, une onde sinusoïdale de courant sera générée.
- b) La deuxième est la forme plate, qui est similaire au moulin à champ et où le rotor et le stator sont de forme identique.

L'application du fluxmètre électrostatique pour la mesure du champ lors des décharges électriques a été développée récemment par Waters, Richard et Stark seulement, le courant de conduction étant, dans ce cas significatif comparé au courant de déplacement généré lors de l'exposition périodique des capteurs au champ électrique appliqué, montre clairement la limite d'utilisation de ces appareils lors de l'étude des décharges électriques.

II.2.3- Sonde à champ statique :

Les sondes à champ statique sont des capteurs de faibles dimensions, elles sont incorporées dans un même niveau de surface sur un plan où l'on désire mesurer le champ électrique. Ce sont des moyens de mesure simples et pas coûteux. On distingue les sondes capacitatives et les sondes polarisées.

II.2.3.1- Sonde capacitive :

La sonde capacitive a été introduite par Collins et Meek [11], c'est un simple capteur circulaire incorporé dans un même niveau de surface dans une électrode isolée d'elle, à la surface de laquelle on veut mesurer le champ électrique. La charge induite à la surface de la sonde de géométrie connue donne un signal proportionnel à l'intensité du champ.

La sonde capacitive ne peut pas mesurer le champ électrique lorsque nous sommes en présence d'une charge d'espace. Cependant elle est bien adaptée à la mesure des champs rapidement variables. Récemment, la sonde capacitive a été largement utilisée par Meek et Craggs dans l'étude des phénomènes de claquage en régime impulsionnel, particulièrement dans les régions à faible champ où le courant de conduction est négligeable.

II .2.3.2- Sonde polarisée :

La sonde polarisée a été introduite par Tassicker en 1974. Elle est de construction similaire à celle de la sonde capacitive mais diffère de celle –ci par son principe de mesure. Le signal de la sonde capacitive étant généré par induction alors que celui de la sonde polarisée dérive du courant de conduction qui la traverse. La sonde capacitive, le fluxmètre électrostatique et la sonde polarisée ont des mérites différents. La sonde capacitive peut mesurer des champs de courtes durées ou rapidement variables, tandis que le fluxmètre électrostatique est mieux adapté à la mesure des champs lentement variables, avec un temps de résolution voisin de $100 \mu s$. La sonde polarisée, quant à elle, est utilisée pour la mesure des champs électriques statiques. Sa réalisation nécessite une grande attention et se prête à la miniaturisation à l'inverse du fluxmètre électrostatique. Avec ses dimensions réduites, cette sonde offre une meilleure résolution spatiale.

Le principe de fonctionnement d'une telle sonde est basé sur le fait que le courant I_s qu'elle collecte, lors de la décharge couronne, se trouve réduit par une tension de polarisation V_b négative. Cette sonde peut également être polarisée positivement, dans ce cas le courant I_s sera augmenté [12].

II .3- Théorie de la sonde polarisée circulaire :

Le principe de la sonde est introduit par Tassicker en 1974. Le signal de la sonde polarisée dérive du courant de conduction qui la traverse. Ce courant est contrôlé par un champ électrique créé localement par polarisation de la sonde. La connaissance du courant et de ce champ local permet de déduire l'intensité du champ extérieure.

Tassicker a développé un modèle théorique sur la sonde polarisée de forme circulaire. Il considère un plan circulaire de rayon r_s et de surface s centrée au milieu d'une électrode (E) en forme d'un disque de rayons intérieure et extérieure respectifs r_e et R_e (figure II.2).

Les surfaces s_s et s_e des deux parties de la sonde sont au même niveau et forment un intervalle d'air $g = r_e - r_s$.

On suppose que un champ électrique uniforme E existe à la surface de l'électrode (E), dans la région de la sonde. En appliquant une tension V_b entre La sonde et l'électrode, une distribution du flux, similaire à celle de la figure (II.3), apparaît au voisinage de la sonde.

La théorie indique que le rapport des courants de la sonde I_s , dû à la présence de V_b et I_{SO} , sous condition $V_b = 0$, obéit à la relation suivant :

$$\frac{I_s}{I_{SO}} = \frac{\Phi_s}{\Phi_{SO}} = 1 + \frac{C}{\pi \cdot r_m \epsilon_0} \frac{V_b}{r_m \cdot E} \quad (\text{II.1})$$

Où Φ_s et Φ_{SO} les flux à travers la sonde, associés respectivement à $V_b \neq 0$ et $V_b = 0$, r_m est le rayon effectif de la sonde et C_0 la capacité formée par les deux surfaces (S) et (E).

Le champ inconnu E peut être déduit si l'on calcule la capacité C_0 . Tassicker a utilisé une expression analytique donnée par Spence [13]:

$$C_a = 4 \cdot r_m \cdot \epsilon_0 \cdot \left(1,07944 + 0,5 \ln \left(1 + \frac{r_m}{2g} \right) \right) \quad (\text{II.2})$$

La relation (II.1) donne une caractéristique I_s / I_{SO} linéaire avec la tension V_b . Cependant, aux fortes valeurs de V_b , quand le champ à la surface de l'électrode s'inverse dû au champ de polarisation $E_b > E$, il se produit une déviation de caractéristique qui rend la relation (II.1) inutilisable.

Une analyse quantitative, plus précise, des performances de la sonde polarise introduite par Tassicker, portant sur la distribution du champ de polarisation E_b , est développée par Selim et Waters en 1980. Le champ E_b est calculé par la méthode des éléments finis [10] sur ordinateur pour différentes configurations, où l'on fait varier le paramètre r_s / g . Le calcul indique que les valeurs du champ sont élevées aux extrémités de la sonde et de l'électrode (E), et augmente avec le rapport r_s / g . Le problème se pose au niveau des extrémités de la sonde et au pourtour de l'électrode, car en ces régions le champ résultant s'inverse à cause des fortes valeurs de E_b . Le flux ainsi associé n'est plus opérationnel de même que la charge concernée. Alors l'équation (II.1), basée sur l'égalité des quantités I_s / I_{SO} et Φ_s / Φ_{SO} , n'est plus valable. Dans leur théorie, Selim et Waters considèrent deux cas :

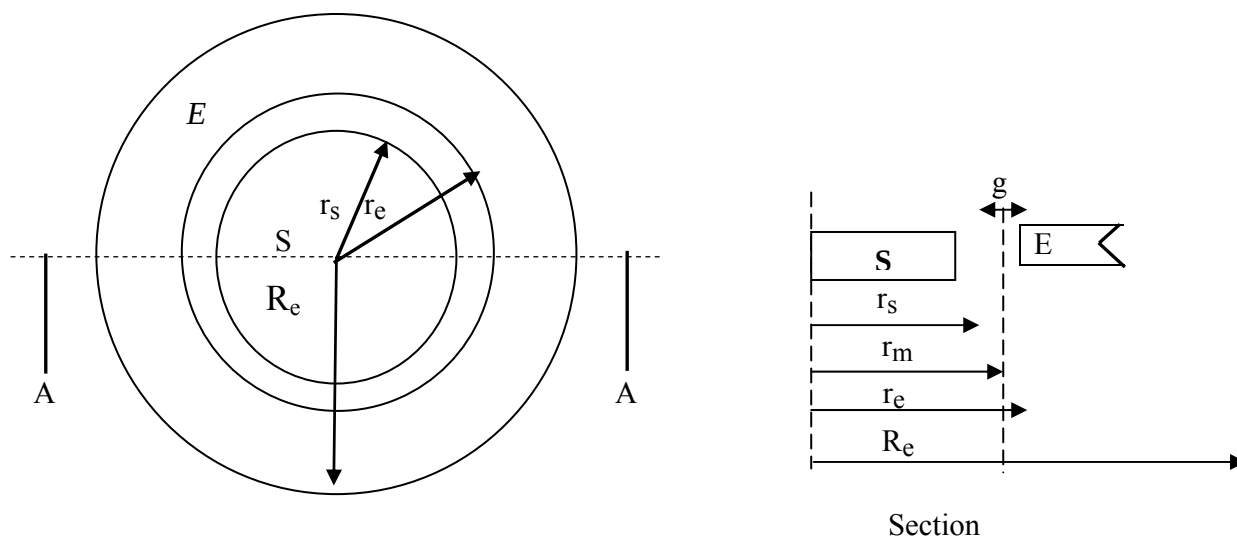
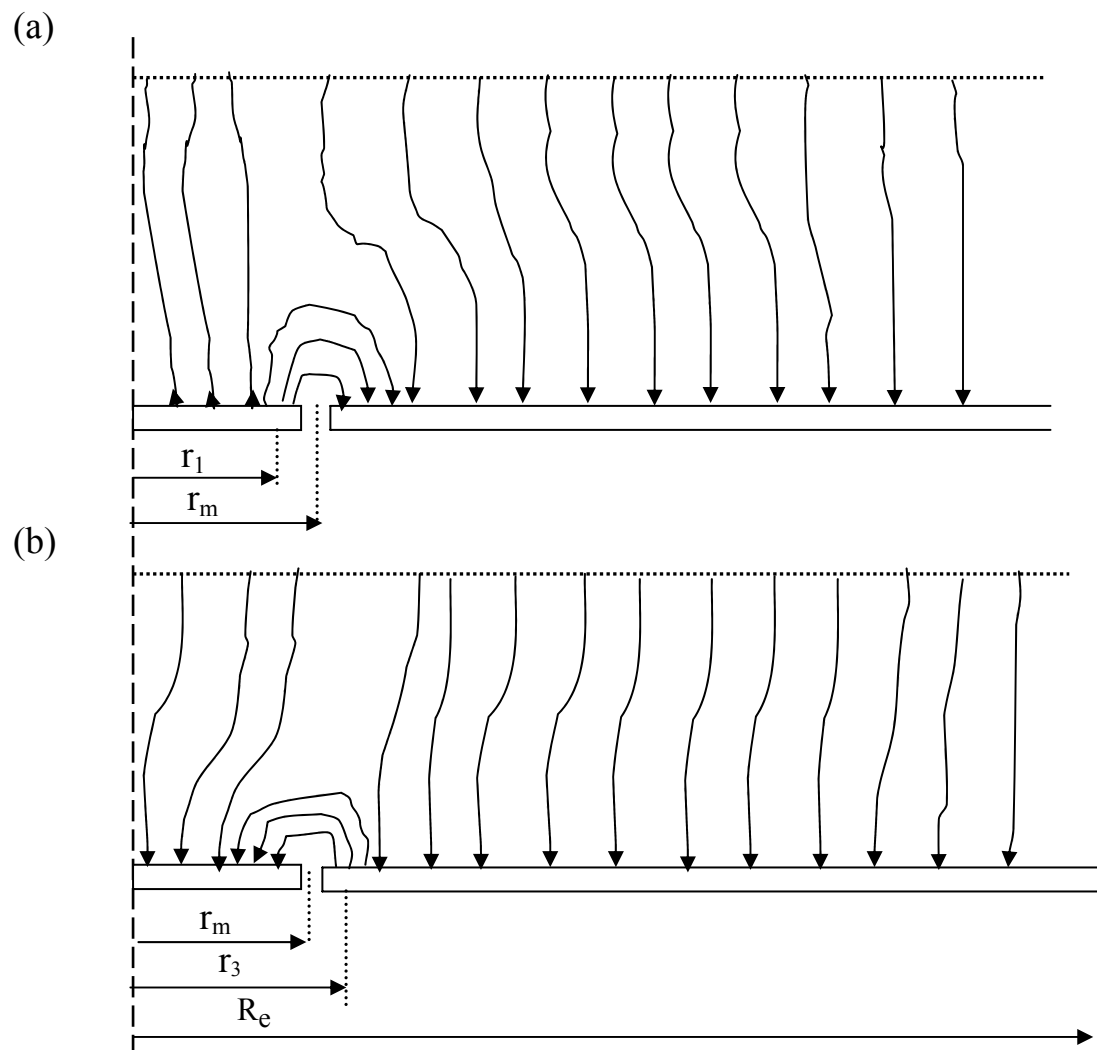
II.3.1- Cas où E_b s'oppose à E :

Figure II.2 : sonde circulaire



a) La sonde est polarisée négativement.

b) La sonde est polarisée positivement.

Figure II.3: Distribution du flux à la surface de la sonde circulaire

Le flux à travers la sonde, lorsque une tension non nulle V_b n'est appliquée est :

$$\Phi_S = 2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \int_0^{r_1} (E - E_b) r \cdot dr \quad (II.3)$$

Où r_1 (figure (II.3a)) est le point appartenant à la sonde et $E + E_b = 0$.

Le flux à travers la sonde quand $V_b = 0$ est donnée par :

$$\Phi_S = \pi \cdot r_m^2 \varepsilon_0 \cdot E \quad (II.4)$$

D'où le rapport des courant de la sonde :

$$\frac{I_S}{I_{SO}} = \frac{\Phi_S}{\Phi_{SO}} = \frac{2}{r_m^2 E} \int_0^{r_1} (E - E_b) r \cdot dr \quad (II.5)$$

II.3.2- Cas où E_b s'ajoute à E :

Dans ce cas (figure (II.3b)), le champ résultant s'inverse en un point r_3 appartenant à l'électrode (E) où $E + E_b = 0$.

Le rapport I_S / I_{SO} est donné par :

$$\frac{I_S}{I_{SO}} = \frac{E \cdot R_e^2 - 2 \int_{r_3}^R (E - E_b) r dr}{E \cdot r_m^2} \quad (II.6)$$

Les équations (II.5) et (II.6) sont équivalentes à l'équation (II.1) donnée par Tassicker lorsqu'on approxime successivement $r_1 = r_m$ (à $V_b < 0$) et $r_3 = r_m$. L'approximation n'est pas justifiée dans la cas de faibles valeurs de V_b , parce qu'une grande partie du flux provient de la polarisation de la sonde dans les régions situées entre r_1 et r_m pour les polarisations négatives et entre r_3 et r_m pour les polarisations positives, comme le montre les figures (II.3a) et (II.3b). L'utilisation des équations (II.5) et (II.6), pour déterminer le champ appliqué E , nécessite un calcul numérique du champ local E_b . La méthode de calcul présente des difficultés aux extrémités de la sonde (S) et de l'électrode (E) voisines de l'intervalle g .

Des mesures avec cette sonde sont effectuées, les deux auteurs comparent les résultats avec ceux obtenus par la mesure directe du champ E à l'aide d'un fluxmètre électrostatique. Ils trouvent que l'accord est acceptable entre les deux méthodes.

Cette configuration de la sonde circulaire est aussi utilisée pour mesurer le champ électrique en géométrie cylindrique et récemment en géométrie fil-plan lors de la décharge couronne.

Un calcul analytique, plus commode du champ local E_b , est possible sur une autre géométrie de la sonde. Cette nouvelle géométrie est la configuration linéaire, elle est mieux adaptée à l'étude du système d'électrodes fil-plan. Nous désignons par E le champ électrique que l'on désire mesurer à la surface de la sonde linéaire, incorporée dans le plan mis à la terre.

III.4- Théorie de la sonde polarisée linéaire :

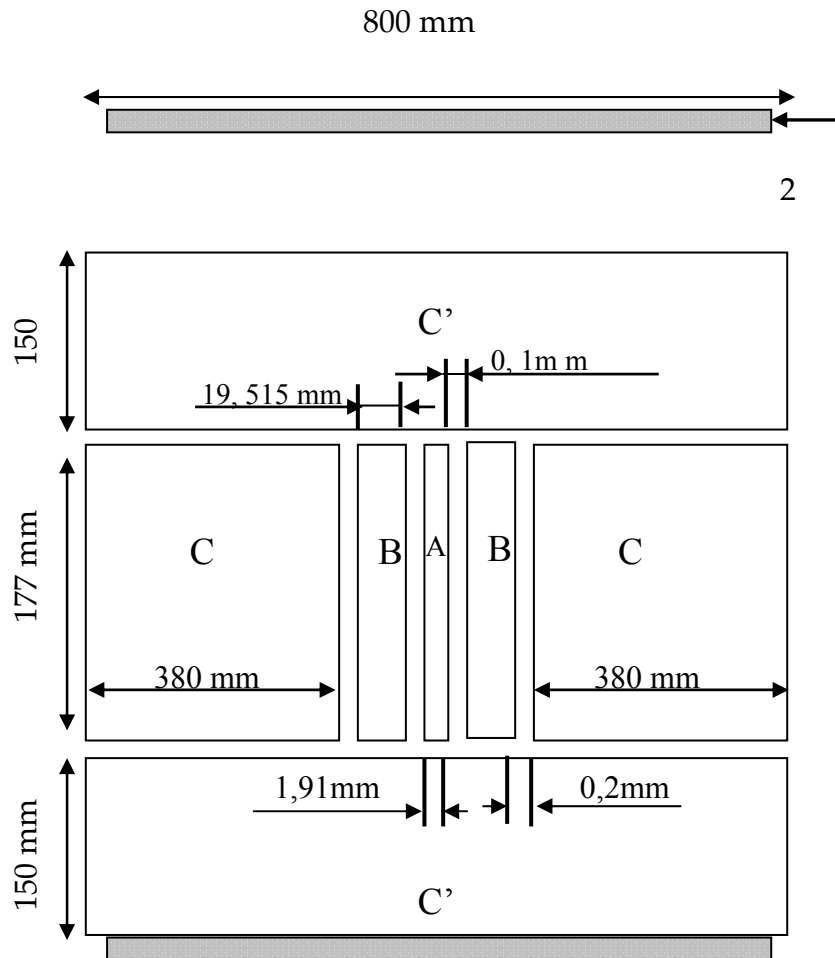
La sonde linéaire est constituée principalement de deux plaques de polarisation (B). Entre les qu'elles loge une lame rectangulaire appelée le collecteur (A). Ce dernier forme ainsi, avec les plaques de la polarisation, un intervalle d'air de largeur g . La sonde est incorporée dans un même niveau de surface entre quatre plans de garde (C) et (C'), (Figure (II 4) et (II .5)).

Les fonctions de la sonde dépendent principalement du choix de ses dimensions et de la précision de sa construction. Notre modèle d'étude est optimisé afin d'obtenir les qualités suivantes :

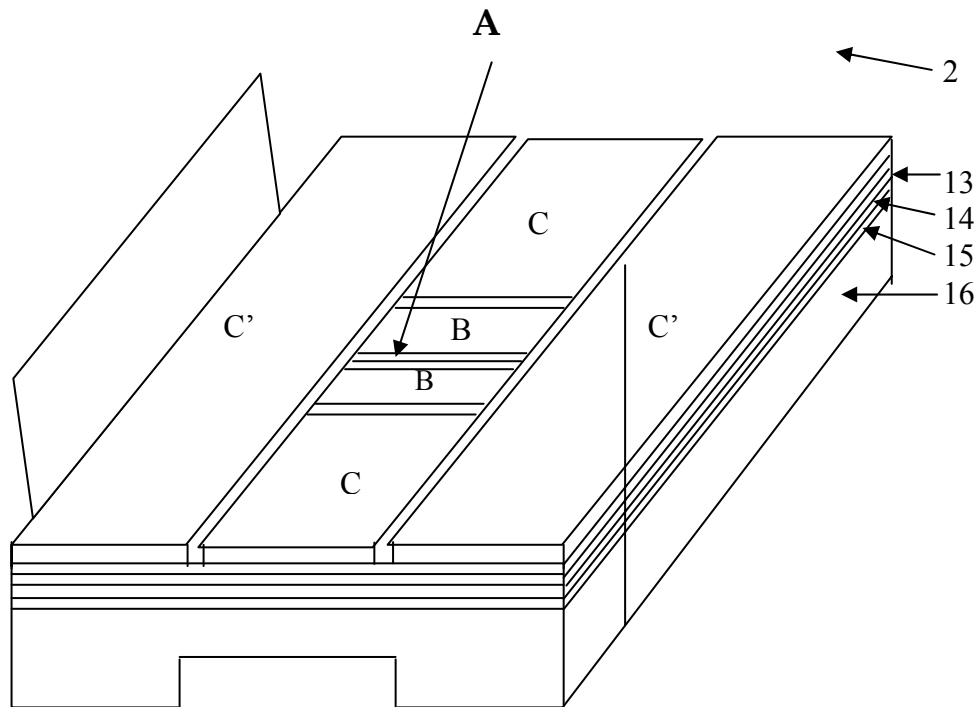
- 1) Une bonne sensibilité du rapport des courants I_s / I_{so} , vis-à-vis de la tension de polarisation V_b des plaques (B), est obtenue pour une largeur " a " du collecteur pas très élevée et pour un intervalle d'air " g " entre (A) et (B) le plus petit possible.
- 2) L'inversion du champ au centre du collecteur (A) est obtenue pour une largeur " a " pas trop faible.
- 3) Le rapport a / g doit être le plus élevé possible pour obtenir une bonne sensibilité dans les mesures. Dans notre cas $a / g = 19.1$, $a = 1.91mm$ et $g = 0,1$.
- 4) Afin d'éliminer tout courant de fuite entre les parties (A) et (B), le collecteur (A) est fixé par deux plaques en bakélite couvertes d'une couche de téflon. Ces plaques sont fixées par deux autre en cuivre mises à la masse (figures (II .6)) [14].

III.4.1- Calcul de champ local E_b :

Il existe deux méthodes de calcul du champ de polarisation E_b . La première est le calcul par ordinateur utilisant les éléments finis, elle permet en particulier la détermination du champ à toute frontière. L'inconvénient de cette méthode réside au niveau des bords du collecteur (A) et des plaques (B) où la composante tangentielle du champ est très élevée. La deuxième est le calcul analytique du champ E_b que nous développons dans ce présent paragraphe.



**Figure II.4: Vue de dessus de la sonde
Polarisée linéaire**



A- collecteur de la sonde.

B- Plaques de polarisation.

C- Plans de grade.

C'- Plans de garde.

2- Supports isolants.

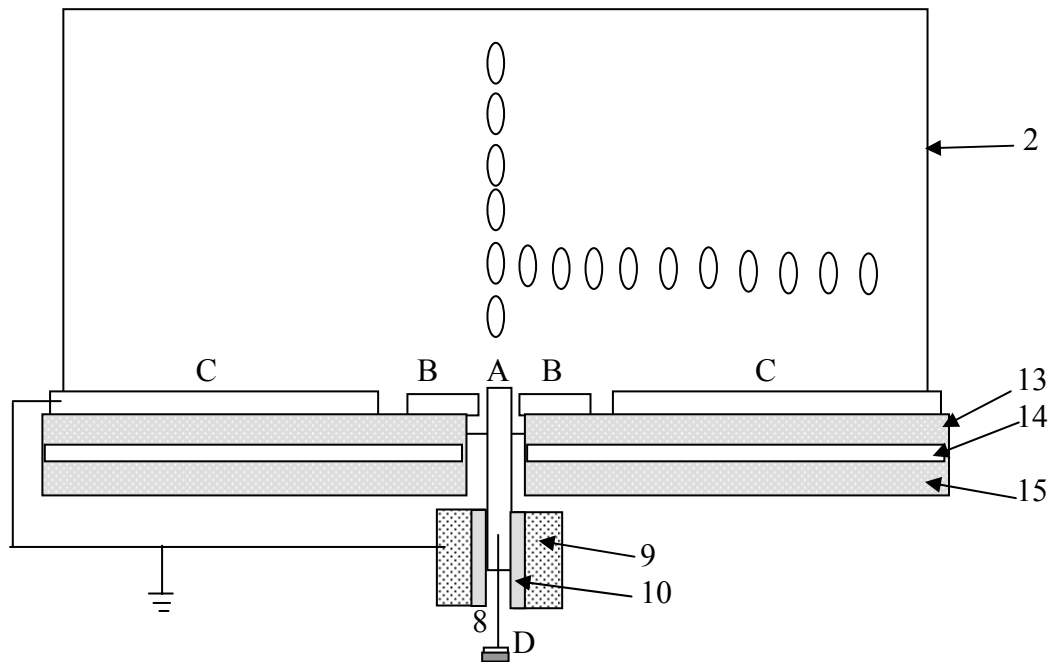
13- Plaque de bakélite.

14 – Plaque de cuivre.

15- Plaque de plexiglas.

16- Support du système d'électr.

Figure II.5: Vue générale du système d'électrodes



- | | |
|---|--------------------------|
| A- Le collecteur de la sonde. | 9- Plaque de cuivre. |
| B- Plaques de polarisation de la sonde. | 10- Plaque de bakélite. |
| C- Plan de mesure. | 13- Plaque de bakélite. |
| 2-Support isolant. | 14 – Plaque de cuivre. |
| 8- Câble coaxial. | 15- Plaque de plexiglas. |

Figure II. 6 : Coupe transversale de la sonde.

II.4.2- Champ entre deux plans :

On considère deux demi –plans formant un angle Ψ (figure (II.7)), l'un est porté à un potentiel V_b et l'autre mis à la terre .Un champ électrique d'intensité E_b est crée entre les deux demi –plans dont les surfaces équipotentiellles sont planes et les lignes du champ des arcs circulaires :

$$E_b(y) = \frac{V_b}{\Psi \cdot y} \quad (\text{II.7})$$

II.4.3- Champ créé par quatre plans coplanaires:

La sonde peut être représentée par la superposition de quatre systèmes de plans coplanaires dont chacun est représenté par deux demi-plans infinis suivant l'axe (oy) (Fig. II.7). Les deux de garde (C') éliminent les effets de bords aux extrémités de la sonde, ce qui permet de considérer que la sonde est de longueur infinie et que le champ local E_b ne dépend que de la variable y .

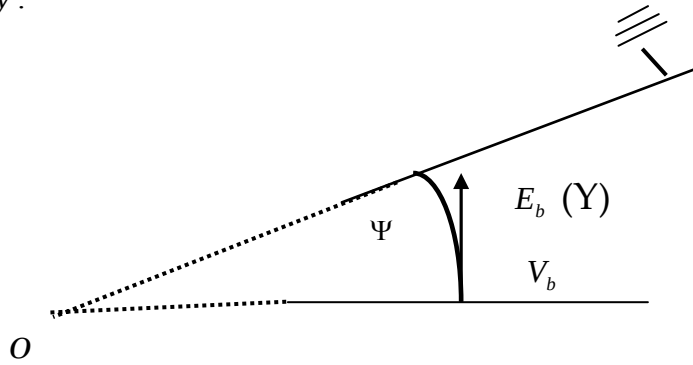
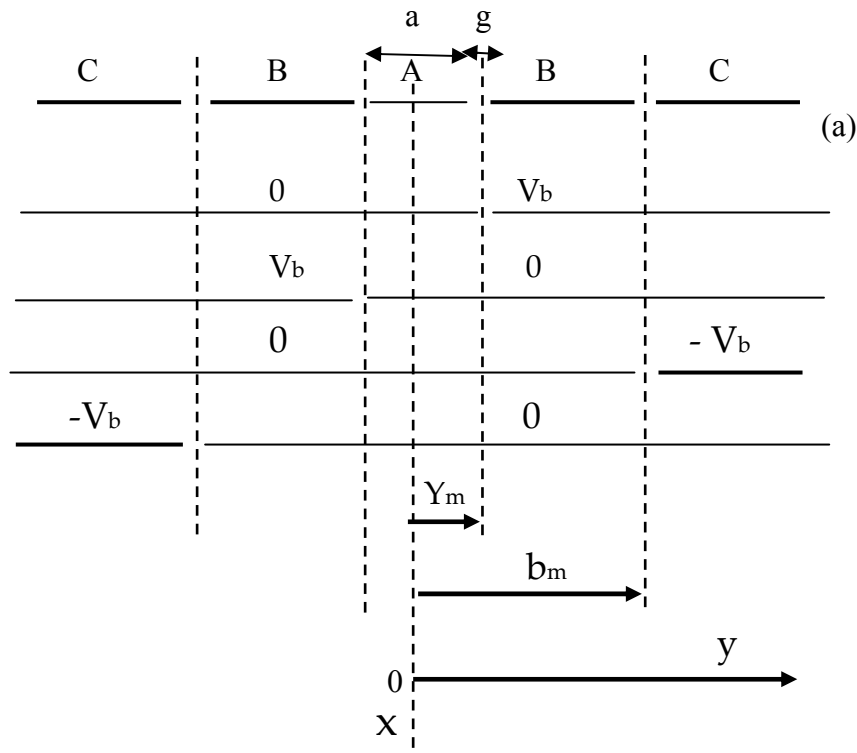


Figure II .7 : Champ entre deux plans



- a) Géométrie de la sonde

- b) Synthèse de la sonde par superposition de plans coplanaires

Figure II .8 : analyse de la distribution géométrique du champ de polarisation

Nous pouvons écrire pour $0 \leq y \leq a/2 < y_m$:

$$E_b(A) = \frac{-V_b}{\pi} \left(\frac{1}{y_m - y} + \frac{1}{y_m + y} - \frac{1}{b_m - y} - \frac{1}{b_m + y} \right) \quad (\text{II.8})$$

Et pour : $y_m < y \leq b_m$

$$E_b(b) = \frac{V_b}{\pi} \left(\frac{1}{y - y_m} - \frac{1}{y + y_m} + \frac{1}{b_m - y} + \frac{1}{b_m + y} \right) \quad (\text{II.9})$$

Où y_m est la demi largeur effective du collecteur (A) et b_m la demi largeur de la sonde.

La distribution du champ est symétrique par rapport au centre du collecteur.

La figure (II.9a). Donne l'allure du champ à $y > 0$ et $V_b < 0$. Le champ E_b présente un minimum sur le collecteur (le centre) et un minimum sur la plaque (B) dû à la présence du plan (C) non polarisé.

II.4.4- Courbes d'étalonnage $I_s/I_{so}=f(E)$:

Les courbes d'étalonnage de sonde dérivent de deux cas, suivant que les plaques (B) sont polarisées négativement ou positivement.

II-4.4.1- E_b De sens opposé à E :

On considère un système d'électrodes fil plan. Lorsque le fil est sous une tension U , suffisamment grande pour créer une décharge couronne (en polarité positive), un champ électrique d'intensité E apparaît à la surface du plan et de la sonde (figure (II .9b)). Si les plaques (B) sont polarisées extérieurement par une tension de valeur V_b négative, un champ local (figure (II .9.a)), d'intensité E_b de sens opposé se superposera au champ E et le courant I_s au collecteur, dû à la décharge, est ainsi réduit. Le champ résultant, dépendant des valeurs de E et E_b s'inverse à la surface du collecteur à une distance y_1 centre de la sonde (Figure (II .9c)), En ce point $E_b + E = 0$.

Les flux par unité de longueur, à travers le collecteur (A), pour les tension respectives V_b non nulle et V_b nulle, sont donnés par :

$$\Phi_A = \int_0^{y_1} (E - E_b) dy = E \cdot y_1 - \int_0^{y_1} E_b \cdot dy \quad (\text{II .10})$$

$$\Phi_{A0} = \int_0^{y_m} E \cdot dy = E \cdot y_m \quad (\text{II .11})$$

Et en posant $F_1(y_1) = \int_0^{y_1} E_b \cdot dy$ (II .12)

Nous en déduisons le rapport des courants $I_S(V_b \neq 0) / I_S(V_b = 0)$ [8]:

$$\frac{I_S}{I_{S0}} = \frac{\Phi_A}{\Phi_{A0}} = \frac{y_1}{y_m} - \frac{F_1(y_1)}{E \cdot y_m} \quad (\text{II .13})$$

II-.4.4.2- E_b De même sens que E :

Si la tension V_b appliquée aux plaques (B) est inversée ($V_b > 0$) et le champ extérieur E n'est pas modifié, le champ locale E_b dans ce cas, se superpose dans le même sens que E et le courant I_S au collecteur (A) dû à la décharge sera ainsi augmenté. Le champ résultant s'inverse à la surface de la plaque (B) en deux points, à des distances y_2 et y_4 du centre de la sonde. Sur la figure (II.9) sont représentés à la surface de la sonde, les champ E_b en (a), E en (b) et $E_b + E$ en (c).

Dans le cas présent, la détermination du flux à travers le collecteur (A) est difficile. Il est plus commande de calculer le flux Φ_b et d'en déduire Φ_a par unité de longueur de la sonde, nous pouvons écrire :

$$\Phi_B = \int_{y_2}^{y_3} (E - E_b) dy \quad (\text{II.14})$$

La limite inférieure est y_2 car le flux pour $y_m \leq y < y_2$ ne traverse pas la plaque (B)

$$\Phi_B = E(y_3 - y_2) - \int_{y_2}^{y_3} E_b \cdot dy \quad (\text{II .15})$$

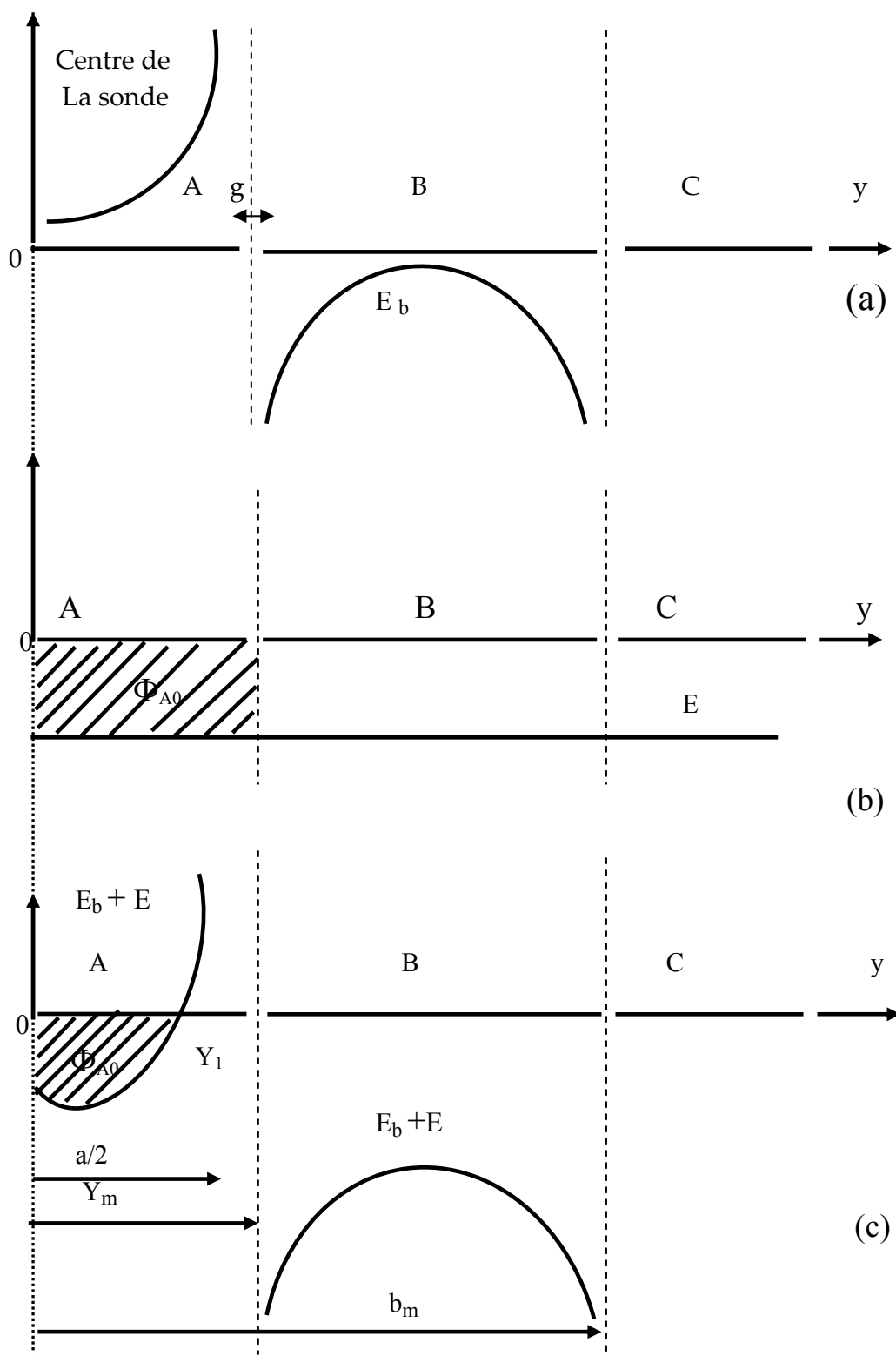


Figure II.9 : Inversion du champ à la surface du collecteur (A) de la sonde linéaire

Et à tension $V_b = 0$:

$$\Phi_{b0} = E(y_3 - y_m) \quad (\text{II.16})$$

Le flux de la plaque (B) pour $y < y_3$ est dévié vers le collecteur (A), aidant ainsi le flux d'origine Φ_{AO} de l'équation (II.11) d'où :

$$\Phi_A = \Phi_{AO} + \Phi_{B0} - \Phi_B = E \cdot y_m + E(y_3 - y_m) - \left[E(y_3 - y_2) - \int_{y_2}^{y_3} E_b \cdot dy \right]$$

En posant : $F_2(y_2) = \int_{y_2}^{y_3} E_b \cdot dy$ (II.17)

Nous obtenons :

$$\Phi_A = E \cdot y_2 + F_2(y_2) \quad (\text{II.18})$$

On note que le flux de la plaque (B), pour $y_3 < y < y_4$ est dévié vers le plan (C) .

Des équations (II.11) et (II.18), nous obtenons :

$$\frac{I_S}{I_{SO}} = \frac{\Phi_A}{\Phi_{AO}} = \frac{y_2}{y_m} + \frac{F_2(y_2)}{E \cdot y_m} \quad (\text{II.19})$$

Les courbes $I_S / I_{SO} = f(E)$ (figure II.11), dérivent des équations (II.8), (II.9), (II.12),

(II.3), (II.17) et (II.19) comme suit :

- a) Quand le champ s'inverse à la surface du collecteur (A), c'est le cas où la tension V_b est négative, nous obtenons à partir des équation (II.8) pour ($V_b = -1\text{volt}$) et (II.12) respectivement :

$$E_b(B) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{y_m - y} + \frac{1}{y + y_m} - \frac{1}{b_m - y} - \frac{1}{b_m + y} \right] \quad (\text{II.20})$$

$$F_1(y_1) = \frac{1}{\pi} \text{Ln} \left[\frac{(y_m + y_1)(b_m - y_1)}{(y_m - y_1)(b_m + y_1)} \right] \quad (\text{II.21})$$

Le champ extérieur E est donné par la relation $E = E_b(A)$ à $y = y_1$:

$$E = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{y_m - y_1} - \frac{1}{y_m + y_1} + \frac{1}{b_m - y_1} + \frac{1}{b_m + y_1} \right] \quad \text{Si } 0 \leq y_1 < y_m \quad (\text{II.22})$$

b) Quand le champ s'inverse à la surface des plaques (A), c'est le cas où la tension V_b est positive, nous obtenons à partir des équations (II.9) et (II.7) respectivement (pour $V_b = +1\text{volt}$), les expressions suivantes :

$$E_b(B) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{y - y_m} - \frac{1}{y + y_m} + \frac{1}{b_m - y} + \frac{1}{b_m + y} \right] \quad (\text{II.23})$$

$$E_2(y_2) = \frac{1}{\pi} \text{Ln} \left[\frac{(y_3 - y_m)(b_m - y_3)(y_2 + y_m)(b_m - y_2)}{(y_3 + y_m)(b_m - y_3)(y_2 - y_m)(b_m + y_2)} \right] \quad (\text{II.24})$$

Le champ extérieur E est donné par la relation $E = E_b(B)$ à $y = y_2$:

$$E = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{y_2 - y_m} + \frac{1}{y_2 + y_m} + \frac{1}{b_m - y_2} + \frac{1}{b_m + y_2} \right] \quad (\text{II.25})$$

Où $y_m < y_2 < b_m$

La valeur de y_3 est obtenue lorsque $\frac{d(E_b(B))}{dy} = 0$, d'où :

$$\frac{1}{(y_3 + y_m)^2} - \frac{1}{(y_3 - y_m)^2} = \frac{1}{(b_m + y_3)^2} - \frac{1}{(b_m - y_3)^2} \quad (\text{II.26})$$

La résolution de l'équation (II.26) donne le cas de notre sonde $y_3 = 8,832 \text{ mm}$. Les valeurs du champ E , données par les équations (II.22) à $V_b = -1\text{volt}$ et (II.25) à $V_b = 1 \text{ volt}$, nous permet d'établir les courbes d'étalonnage en utilisant les équations (II.13) et (II.19).

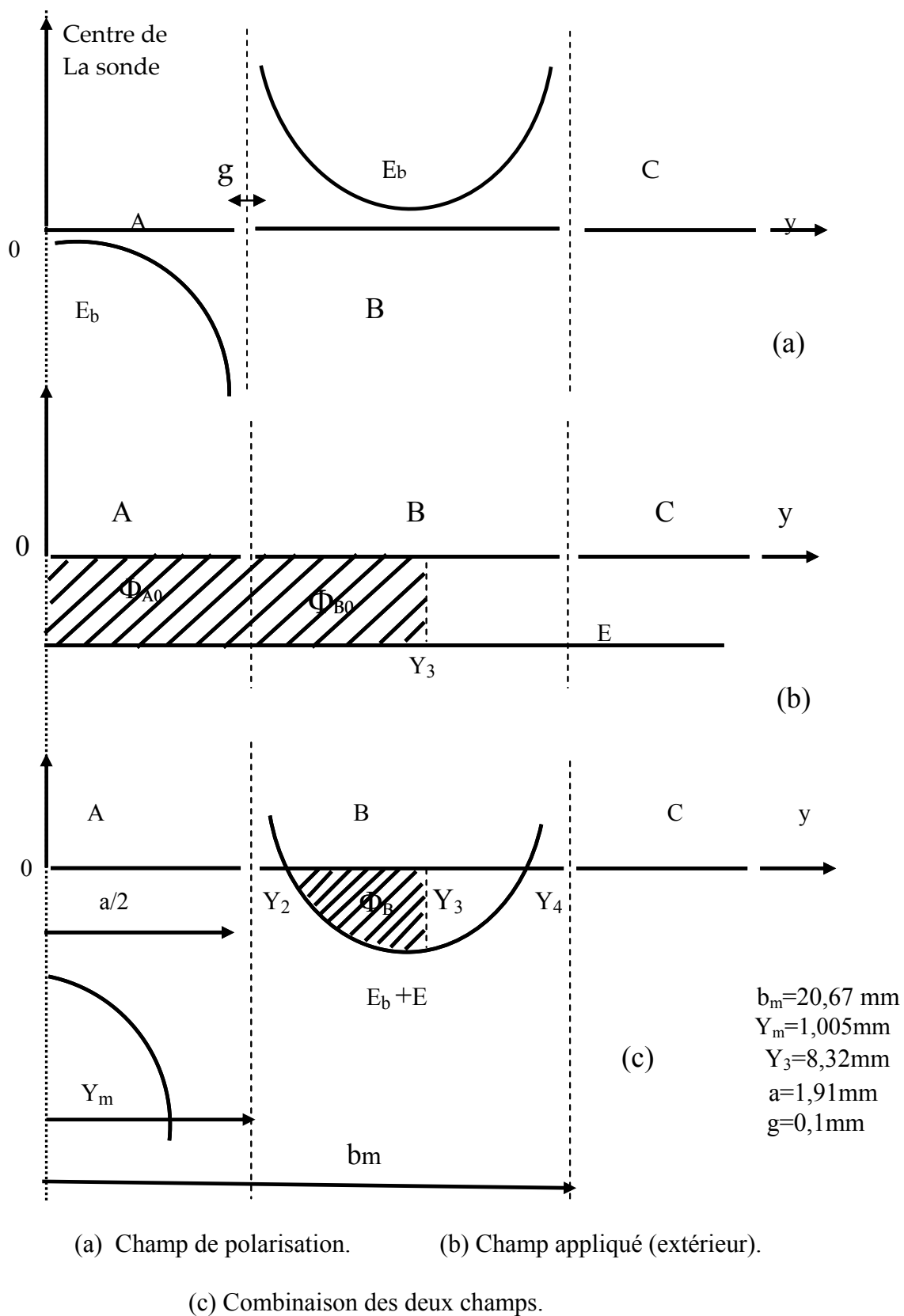


Figure II .10: Inversion du champ à la surface des plaques de polarisation (B) de la sonde linéaire

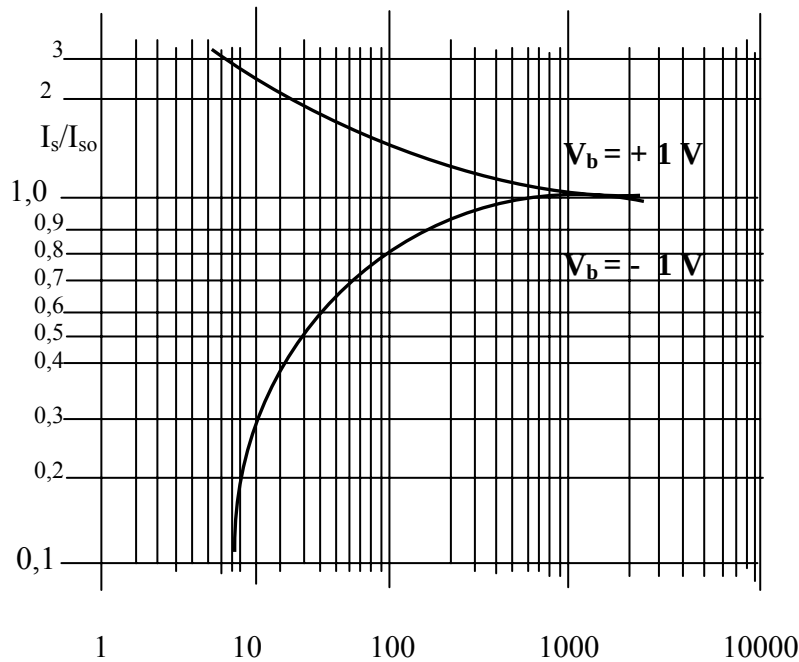


Figure II.11 : Courbe d'étalonnage de la sonde $(I_s/I_{so}) = f(E_p)$ donnée

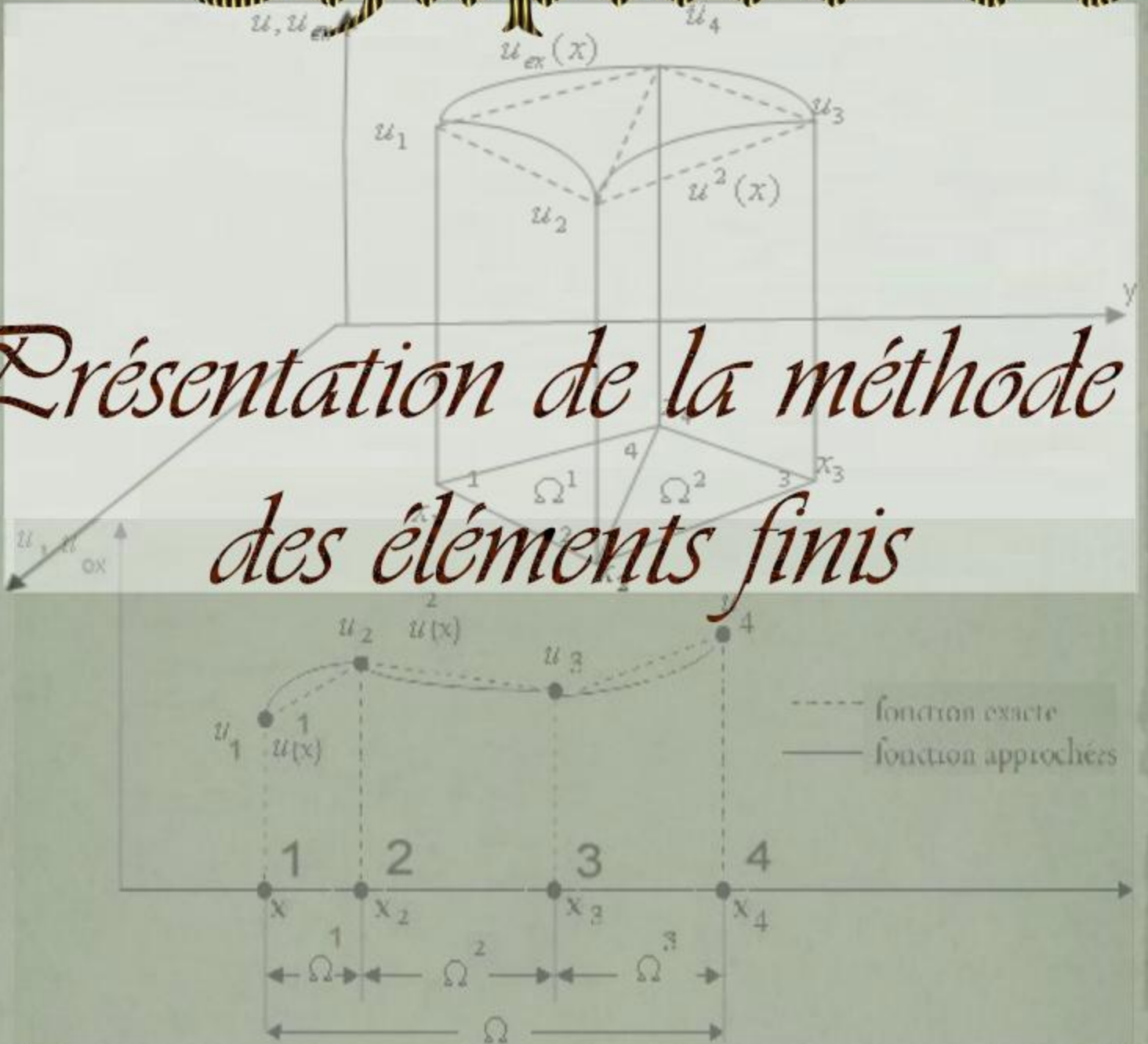
Pour $V_b = \pm 1$ volt ($E = E_p$ pour $V_b \pm 1$ volt)

La figure (II.11) montre la courbe universelle donnant le champ E basé pour une tension $V_b = \pm 1$ volt. Pour des valeurs de V_b différents de 1 volt, le champ inconnu E est obtenu à partir de la valeur déterminée sur la courbe en le multipliant par la valeur de V_b . Ceci illustre le caractère invariant de la sonde : le champ E doit être indépendant de la tension de polarisation V_b .

II.5- Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons présenté les appareils les plus connus pour mesurer le champ électrique. La sonde à champ statique est l'un de ces appareils. Mais nous avons remarqué que nous ne pouvons pas mesurer avec précision le champ électrique lorsque nous sommes en présence d'une charge d'espace. La détermination de champ appliqué nécessite un calcul numérique du champ local. Ce calcul présente une difficulté aux extrémités de la sonde (S) et de l'électrode (E). La configuration de la sonde circulaire est aussi utilisée pour le champ électrique en différentes géométries. La sensibilité de la mesure doit être liée avec le rapport a/g , et pour calculer le champ électrique, il faut tout d'abord mesurer le champ de la polarisation E_b .

04 Chapitre 03



*Profitez du moment présent de votre vie,
Car ce moment ne reviendra pas.
L'avenir peut être meilleur ou pis,
Mais maintenant vous êtes là.*

III.1- Introduction :

Les origines de la méthode des éléments finis remontent aux années 1950, lorsque des ingénieurs l'utilisèrent à fin de simuler des problèmes de mécanique des milieux continus déformables. Depuis le champ d'application s'est considérablement étendu et fondement théorique de la méthode se sont amplement consolidés. Il existe de nos jours, un nombre important de logiciels commerciaux et académiques qui utilisent la MEF comme un outil de simulation robuste pour des problèmes de mécanique des milieux continus, de mécanique des fluides, de thermique, d'électromagnétisme ou de finance.

L'essor de la méthode des éléments finis repose sur deux ingrédients fondamentaux. D'une part, les propriétés interpolant des éléments finis : ceux-ci permettent d'approcher des fonctions définies sur un domaine en maillant ce domaine. D'autre part, en choisissant sur chaque maille des combinaisons linéaires de fonctions de forme (par exemple polynomiales) [15].

La méthode des éléments finis est utilisée aussi pour la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP), dans tous les domaines des sciences de l'ingénieur. Celle-ci est très puissante pour la résolution des EDP de Maxwell surtout dans les domaines complexes. Toutefois elle ne s'applique pas directement aux (EDP), mais à une formulation intégrale qui est équivalente aux problèmes à résoudre, en utilisant l'une des deux approches précédentes. De manière générale, elle comporte des conditions aux bornes permettant d'assurer l'existence et l'unicité de la solution [16].

La discrétisation passe par la définition d'un espace de fonctions tests approprié, sur lequel les solutions de la formulation variationnelle de l'équation sont exactes. Cela nécessite la définition d'un maillage du domaine. Ce maillage permet aussi de définir une base fonctionnelle b , sur laquelle on projette la fonction inconnue u . nous appliquons en outre la formulation variationnelle pour chacune des fonctions de b .

Dans le cas d'une EDP linéaire avec opérateur symétrique (comme l'est Δ), il s'agit au final de résoudre une équation algébrique linéaire, inversible dans le meilleur des cas.

III.2- Le problème modèle :

On considère un intervalle $\Omega =]a, b[$, étant donné deux fonctions $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on cherche une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} -(zu')' = m & \text{dans } \Omega \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(III.1)} \\ \text{(III.2)} \end{matrix}$$

Les équations (III.1) et (III.2) interviennent également dans des modèles de diffusion et d'électrostatique. L'inconnue u est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. La méthode des éléments finis permet de construire une approximation de cette fonction, c'est-à-dire une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ que l'on note u_h et telle que la différence $u - u_h$ en une certaine norme puisse être rendue suffisamment petite. Toutefois avant d'étudier l'approximation de problème (III.1)-(III.2) par la méthode des éléments finis, il convient de préciser le cadre mathématique dans le quel on se place. L'objectif est de s'assurer que le problème est bien posé, c'est-à-dire qu'il admet une et une seule solution, pour cela, on reformule ce problème sous la forme faible suivante :

Chercher $u \in S$ tel que

$$\int_{\Omega} zu' \beta' = \int_{\Omega} m \beta \quad \forall \beta \in S. \quad \text{(III.3)}$$

où S est un espace fonctionnel (un espace vectoriel dont les éléments sont des fonctions). On suppose que les éléments de S s'annulent en a et en b .

Formellement, l'équivalence entre (III.1)-(III.2) et (III.3) repose sur une intégration par parties, en effet, si u est solution de (III.1)-(III.2) alors en multipliant (III.1) par une fonction test β arbitraire dans S en intégrant par parties et en utilisant le fait que v s'annule en a et en b , il vient :

$$\int_{\Omega} m \beta = \int_{\Omega} -(zu')' \beta = \int_{\Omega} zu' \beta' - [zu' \beta]_a^b = \int_{\Omega} zu' \beta' \quad \text{(III.4)}$$

Réciproquement, si u est solution de (III.3), on obtient en intégrant par parties le membre de gauche de (III.3) :

$$\forall \beta \in S. \int_{\Omega} [m + (zu')'] \beta = 0 \quad \text{(III.5)}$$

Afin d'établir le caractère bien posé de (III.3), il est nécessaire de préciser l'espace fonctionnel S , un point important concerne le sens à donner aux dérivées, en effet, si le coefficient z est discontinu, on ne peut pas donner un sens classique à la dérivée de zu' même si la fonction u est régulière. Pour remédier cette difficulté, on introduit la notion de distribution sur Ω et celle de dérivée au sens des distributions.

III.3- Principes de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis repose sur deux principes : d'une part, la formulation d'un problème approché par la méthode de Galerkin, qui permet de remplacer un problème posé en dimension infinie par un système linéaire. D'autre part, la construction d'un espace d'approximation (de dimension finie) à l'aide d'un maillage, de fonctions polynomiales par morceaux et de degré de liberté sur chaque maille.

La première étape dans la construction de l'espace d'approximation S_b , consiste à mailler l'intervalle Ω en une dimension d'espace. Un maillage $\Omega =]a, b[$ est une collection indexée d'intervalle $\{I_i = [x_{1,i}, x_{2,i}]\}_{1 \leq i \leq N_{ma}}$ tous de mesure non nulle et formant une partition de Ω . En d'autres termes on a :

$$]a, b[= \bigcup_{i=1}^{N_{ma}} [x_{1,i}, x_{2,i}] \quad \text{et} \quad]x_{1,i}, x_{2,i}[\cap]x_{1,j}, x_{2,j}[= \emptyset \quad \text{pour } i \neq j. \quad (\text{III.6})$$

Les intervalle I_i sont appelés les maille (ou les éléments ou les cellules des maillage), et l'entier N_{ma} désigné le nombre totale de mailles. La façon la plus simple de construire un maillage est de choisir $(N_{ma} + 1)$ points distincts de Ω tels que :

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{N_{ma}} < x_{N_{ma}+1} = b_i \quad (\text{III.7})$$

Et de poser $x_{1,i} = x_i$ et $x_{1,j} = x_j$ pour tout $i \in \{1, \dots, N_{ma}\}$. Les points de l'ensemble $\{x_1, \dots, x_{N_{ma}+1}\}$ sont appelés les sommets du maillage. On désigne par N_{so} le nombre de sommets du maillage en une dimension d'espace. On a donc :

$$N_{so} = N_{ma} + 1 \quad (\text{III.8})$$

Le maillage est à priori de pas variable, on pose pour tout $i \in \{1, \dots, N_{ma}\}$:

$$b_i = x_{N_{ma}+1} - x_i \quad \text{et} \quad b = \max_{1 \leq i \leq N_{ma}} b_i \quad (\text{III.9})$$

On dit que le maillage est uniforme lorsque $b = b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, N_{ma}\}$ par la suite, le maillage est désigné sous la forme $T_b = \{I_i\}_{1 \leq i \leq N_{ma}}$.

La deuxième étape dans la construction de l'espace d'approximation consiste à choisir des fonctions de forme sur chaque maille, on d'autres termes, les fonctions de S_b sont telles que leur restriction à chaque maille $I_i \in T_b$ et dans tel ou tel espace polynomial.

III.4- Exposé de la démarche :

La méthode consiste à rechercher une solution approchée de la solution exacte sous la forme d'un champ $\vec{F}(M, t)$ défini par morceaux sur des sous domaines de Ω . Les n sous domaines Ω_i doivent être tels que :

$$\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \Omega \quad \text{et} \quad \overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} = \emptyset \quad \forall \quad i \neq j$$

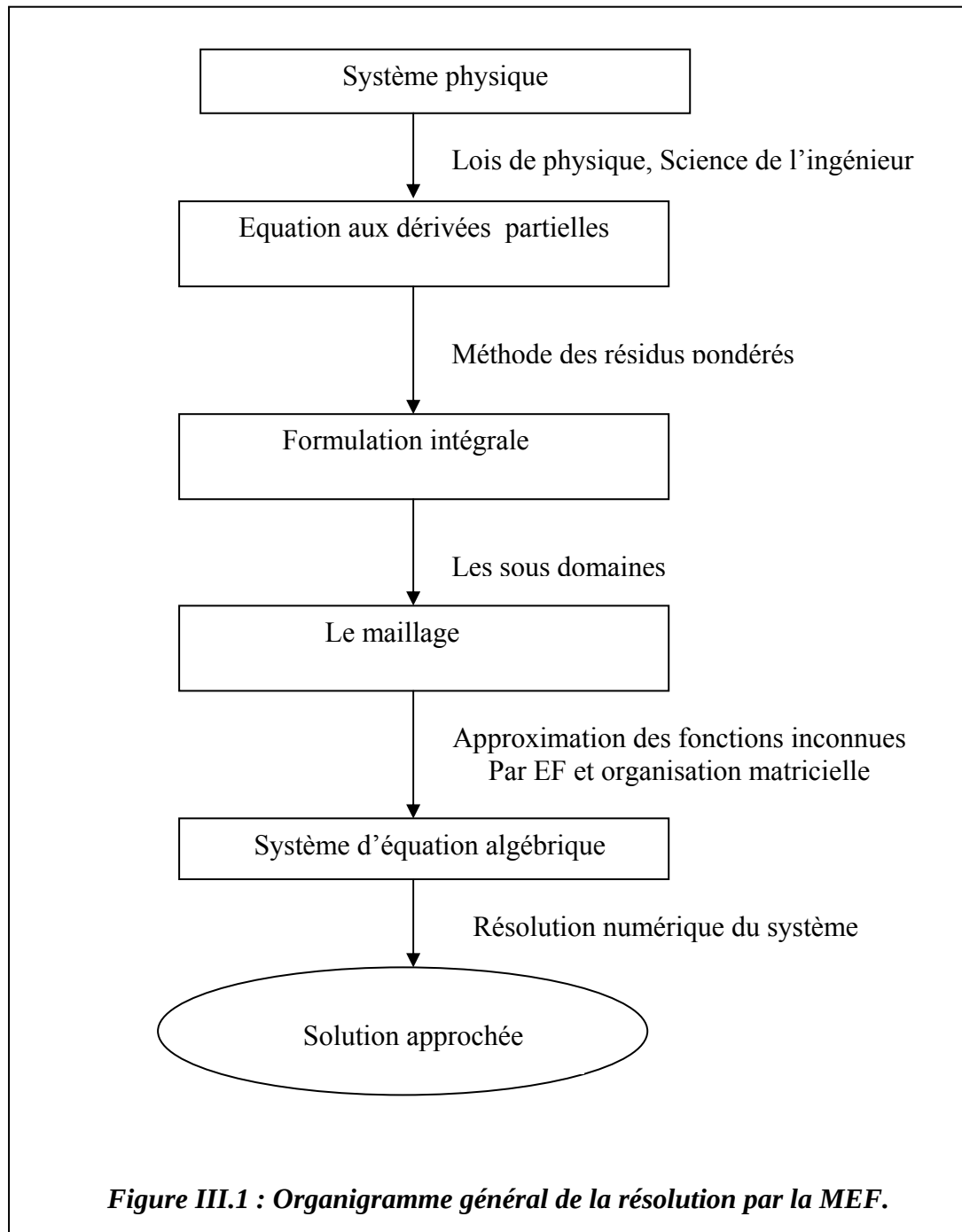
Où $\overline{\Omega_i}$ désigne l'intérieur de Ω_i . Les champs $\vec{f}_i(M, t)$, définis sur chaque sous domaines sont des champs choisis parmi une famille arbitraire de champs.

Pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis, on procède donc par les étapes successives :

- 1- On se pose un problème physique sous la forme d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles à satisfaire en tout point d'un domaine Ω avec des conditions aux limites sur le bord $\partial\Omega$
- 2- On construit une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : c'est la formulation variationnelle du problème.
- 3- On divise Ω en sous domaines : c'est le maillage. Les sous domaines sont appelés mailles
- 4- On choisit la famille de champ locaux, c'est-à-dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds.
- 5- On ramène le problème à un problème discret : c'est la discrétisation. en effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments.
- 6- On résout le problème discret : c'est la résolution

- 7- On peut alors construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et en déduire d'autres grandeurs : c'est le post-traitement.
- 8- On visualise et on exploite la solution pour juger de sa qualité numérique et juger si elle satisfait les critères du cahier des charges : c'est l'exploitation des résultats.

Nous pouvons résumer les étapes précédentes dans l'organigramme suivant:



III.5- Approximation par éléments finis :

Il existe deux types principaux d'approximations [18]:

III.5.1-Approximation nodale :

Un modèle mathématique d'un système physique fait intervenir plusieurs variables ou fonctions dites exactes $u_{ex}(x)$: températures, vitesses, épaisseurs, etc...

Celles-ci sont représentées par des fonctions approchées « $u(x)$ » telles que :

$$e(x) = u(x) - u_{ex}(x) \quad (\text{III.10})$$

Soit une différence assez petite pour l'objectif viser.

Pour construire une fonction "approchée", nous pouvons :

- Choisir un ensemble fini de fonctions dépendant de n paramètres a_i : $u(x, a_i)$;
- Déterminer les paramètres $a_1, a_2, \dots, a_n$ pour satisfaire la condition (III.10), par exemple en faisant coïncider $u_{ex}(x)$ et $u(x)$ en n points, c'est-à-dire en annulant $e(x)$ en ces n points. Les fonctions $u(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$ sont souvent choisies de manière à être faciles à évaluer sur ordinateur, à intégrer ou dériver explicitement.

Ainsi l'approximation peut fournir :

- Une expression approchée en tout point x d'une fonction difficile à évaluer ou connue seulement en certains points ;
- Une solution approchée d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles.

La fonction approchée u est le plus souvent linéaire en a_i :

$$u(x) = p_1(x)a_1 + p_2(x)a_2 + \dots + p_n(x)a_n. \quad (\text{III.11})$$

$$\text{soit :} \quad u(x) = \langle p_1(x) \ p_2(x) \dots p_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \langle p \rangle \{a\}. \quad (\text{III.12})$$

Où : $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont des fonctions connus linéairement indépendantes, telles que des polynômes ou des fonctions trigonométriques. (Chaque fonction ne peut pas être construite par combinaison linéaire des autres fonctions). Ces fonctions sont

Cependant nous pouvons choisir comme paramètres a_i les valeurs de la fonction

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x_1) = u_{ex}(x_1) = u_1 \\ u(x_2) = u_{ex}(x_2) = u_2 \\ \\ u(x_n) = u_{ez}(x_2) = u_n \end{array} \right. \quad (\text{III.13})$$
$$u(x) = \langle N_1(x)N_2(x)...N_n(x) \rangle \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{matrix} \right\} = \langle N \rangle \quad (\text{III.14})$$

- Les paramètres a_i sont les paramètres généraux de l'approximation.
- Les paramètres u_i sont les paramètres nodaux ou variables nodales.
- La relation (III.12) définit une approximation non nodale.
- La relation (III.14) définit une approximation nodale.
- Les fonctions $p(x)$ sont les fonctions d'interpolation.

a) Comme $u(x_i) = u_i$, les fonctions N_I vérifient :

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

46

III.5.2-- Approximation par élément finis :

La construction d'une fonction approchée $u(x)$ est difficile lorsque le nombre n de nœuds et donc de paramètres u_i devient important. Le problème se complique encore si le domaine Ω a une forme complexe de Ω_i .

La méthode d'approximation nodale par sous domaines simplifie la construction de $u(x)$ et s'adapte très bien au calcul sur ordinateur. Elle consiste à :

- Identifier un ensemble de sous domaines Ω^e du domaine Ω ;
- Définir une fonction approchée $u^e(x)$ différente sur chaque sous domaines Ω^e par la méthode d'approximation nodale.

La méthode d'approximation par éléments finis est une méthode particulière d'approximation par sous –domaine qui présente les particularités suivantes :

- L'approximation nodale sur chaque sous-domaine Ω^e ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des nœuds situés sur Ω^e et sur sa frontière.
- Les fonctions approchées $u^e(x)$ sur chaque sous domaines Ω^e sont construites de manière à être continues sur Ω^e et elles satisfont des conditions de continuité entre les différents sous –domaines.
- Les sous domaines Ω^e sont appelés éléments.
- Les points en lesquels la fonction approchée $u^e(x)$ coïncide avec la fonction exacte $u_{ex}(x)$ sont les nœuds d'interpolation ou points nodaux.
- Les coordonnées x_i de ces nœuds sont les coordonnées nodales.

L'approximation par éléments finis présente deux aspects distincts :

- ❖ Il faut tout d'abord définir analytiquement la géométrie de tous les éléments, ce qui est plus ou moins compliqué selon leurs formes.
- ❖ Il faut ensuite construire les fonctions d'interpolation $N_i(x)$ correspondant à chaque élément [14]

III.5.2.1- Approximation à une dimension par éléments finis :

L'explication et les caractéristiques de cette approximation, sont données à travers l'exemple de la figure (III.2) suivante :

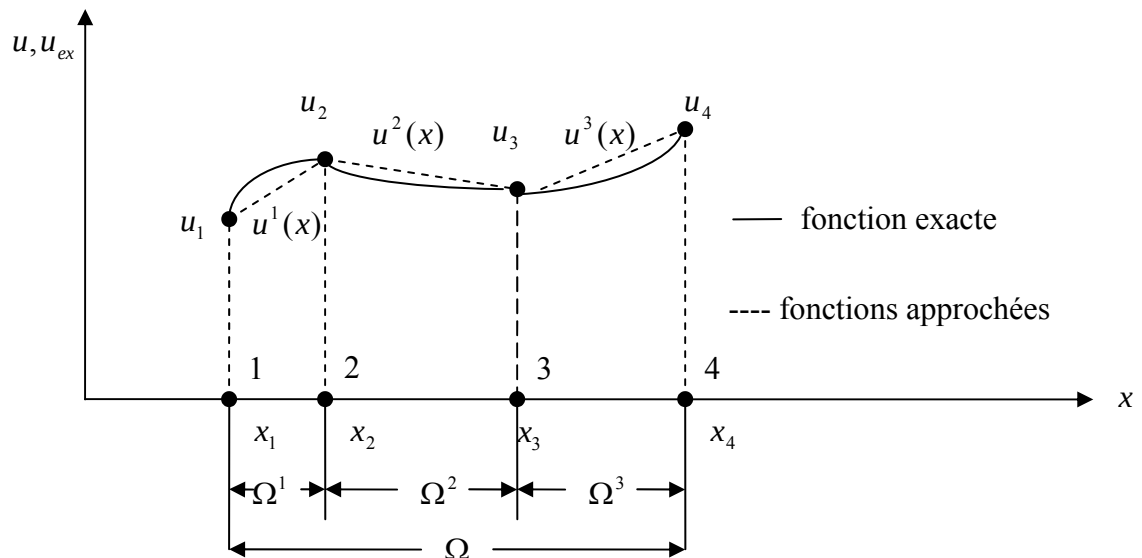


Figure III.2: Approximation à une dimension

-Définition de la géométrie des éléments :

Nœuds : 1, 2, 3, 4.

Coordonnées nodales : x_1, x_2, x_3, x_4

Domaine complet Ω : $x_1 \leq x \leq x_4$

$$\text{Eléments : } \begin{cases} \Omega^1 : x_1 \leq x \leq x_2 \\ \Omega^2 : x_2 \leq x \leq x_3 \\ \Omega^3 : x_3 \leq x \leq x_4 \end{cases}$$

- Construction des fonctions approchées $u^e(x)$:

Variables nodales : u_1, u_2, u_3, u_4

Fonctions approchées $u^e(x)$ linéaires sur chaque élément.

-Élément 1 (domaine Ω^1) :

$$u^1(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2 \quad , \text{ ou } N_1 \text{ et } N_2 \text{ sont des fonctions linéaires}$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} & N_1(x_1) &= 1 & N_1(x_2) &= 0 \\ N_2 &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & N_2(x_1) &= 0 & N_2(x_2) &= 1 \end{aligned}$$

Cette approximation est de type Lagrange du 3^{ème} degré de la forme :

$$N_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

-Élément 2 (domaine Ω^2) : $u^2(x) = N_1 u_2 + N_2 u_3$

Où
$$N_1 = \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \quad ; \quad N_2 = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

-Élément 3 (domaine Ω^3) : $u^3(x) = N_1 u_3 + N_2 u_4$

Où
$$N_1 = \frac{x - x_4}{x_3 - x_4} \quad ; \quad N_2 = \frac{x - x_3}{x_4 - x_3}$$

Les fonctions $u^e(x)$ et $N_i(x)$ sont différentes pour chaque élément Ω^e et sont nulles en dehors de l'élément Ω^e . La somme des fonctions $u^1(x)$, $u^2(x)$ et $u^3(x)$ donne la fonction approchée $u(x)$ sur l'ensemble du domaine Ω .

III.5.2.2- Approximation linéaire à deux dimensions par éléments finis :

Pour l'approximation à deux dimensions, nous avons l'exemple de la figure (III.3) suivante :

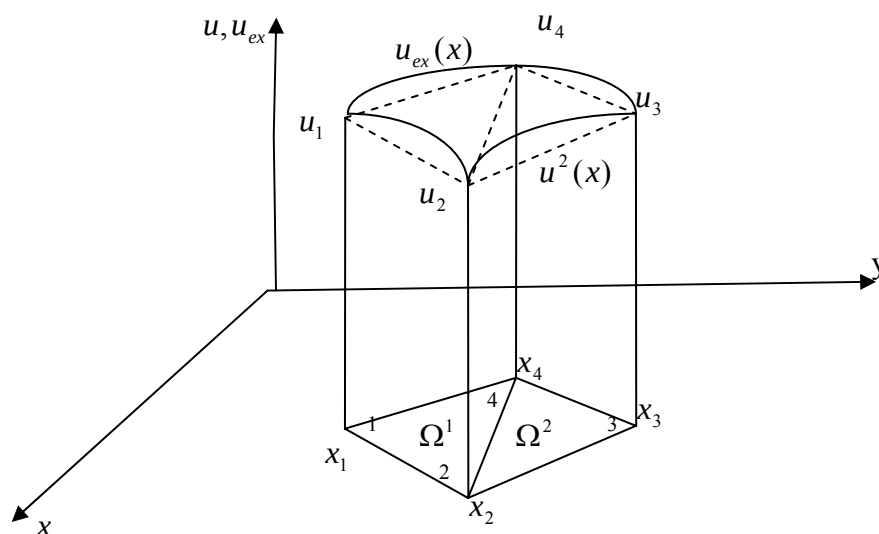


Figure III.3: Approximation à deux dimensions

- Définition de la géométrie des éléments :

Nœuds : 1, 2, 3, 4.

Coordonnées nodales : x_1, x_2, x_3, x_4

Domaine complet Ω : quadrilatère 1-2-3-4

Eléments : $\left\{ \begin{array}{l} \Omega^1 : \text{triangle 2-3-4} \\ \Omega^2 : \text{Triangle 2-3-4} \end{array} \right.$

- Construction des fonctions approchées $u^e(x)$:

Variables nodales : u_1, u_2, u_3, u_4

Fonctions approchées $u^e(x)$ linéaires en x sur chaque élément.

. Elément 1 (domaine Ω^1) :

$$u^1(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 + N_3(x)u_4 \quad ,$$

$u^1(x)$ est une fonction linéaire en x et y qui prend les valeurs u_1, u_2, u_4 aux points x_1, x_2, x_4 .

Cette fonction est nulle en dehors du domaine Ω^1 .

La fonction N_1 est une fonction linéaire en x et y qui prend la valeur 1 en x_1 et la valeur 0 en x_2 et x_4 . N_1 est nulle en dehors de Ω^1 .

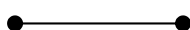
. **Elément 2 (domaine Ω^2)** : $u^2(x) = N_1(x)u_2 + N_2(x)u_3 + N_3(x)u_4$ [14]

III.6- Formes des éléments:

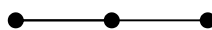
III.6.1- Eléments classiques :

Nous présentons maintenant les formes de quelques éléments classiques correspondant à des domaines à une, deux et trois dimensions. Chaque élément est identifié par un nom précisant sa forme ainsi que par le type de courbe ou de surface qui en forme la frontière. De plus, nous donnons le nombre de nœuds géométriques nécessaires pour définir l'élément [18].

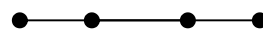
- **Elément à une dimension :**



Linéaire (2)

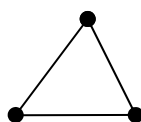


quadratique (3)

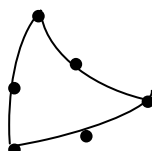


cubique (4)

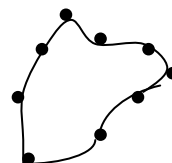
- **Elément à deux dimensions :** ce sont des triangles ou quadrilatères dont les cotés sont des courbes polynomiales du 1^{er}, 2^e et 3^e degré.



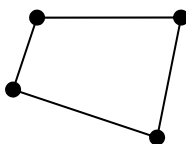
linéaire (3)



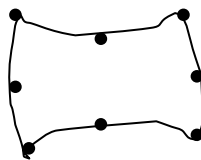
quadratique(6)



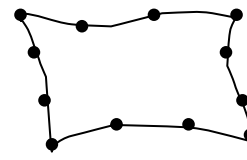
cubique(9)



Linéaire (4)



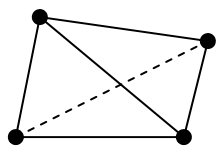
quadratique(8)



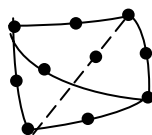
cubique(15)

- **Eléments à trois dimensions :** Ce sont des tétraèdres hexaèdres ou prismes dont les faces sont des surfaces polynomiales du 1^{er}, 2^e ou 3^e degré.

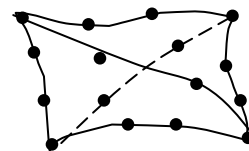
-Eléments tétraédriques :



linéaire (4)

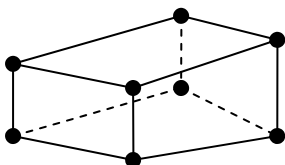


quadratique(10)

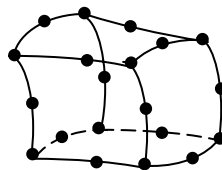


cubique(16)

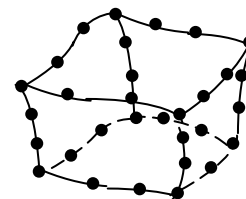
-Eléments hexaédriques :



linéaire (8)

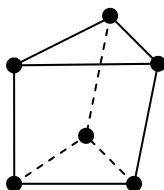


quadratique (20)

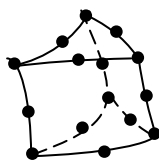


cubique(40)

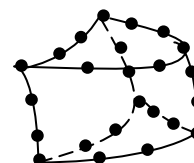
-Eléments prismatiques :



lineaire (6)



quadratique (15)



cubique (24)

III.6.2- Eléments de références :

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, introduisons la notion d'élément de référence (Fig.III.4) : un élément de référence Ω^r est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel Ω^e par une transformation géométrique. Cette transformation dépend de la forme et de la position de l'élément réel. Chaque transformation est choisie de manière à présenter les propriétés suivantes :

- Elle est bijective en tout point situé sur l'élément de référence ou sur sa frontière : à tout point de Ω^r un et un seul, et inversement.
- Les nœuds géométriques de l'élément de référence correspondent aux nœuds de l'élément réel.

- Chaque portion de frontière de l'élément de référence, définie par les nœuds géométriques de cette frontière, correspond à la portion de frontière de l'élément réel définie par nœuds correspondants.

Soulignons qu'un même élément de référence Ω^r (par exemple un triangle à 3 nœuds) se transforme en tous les éléments réels Ω^e de même type par des transformations différentes :

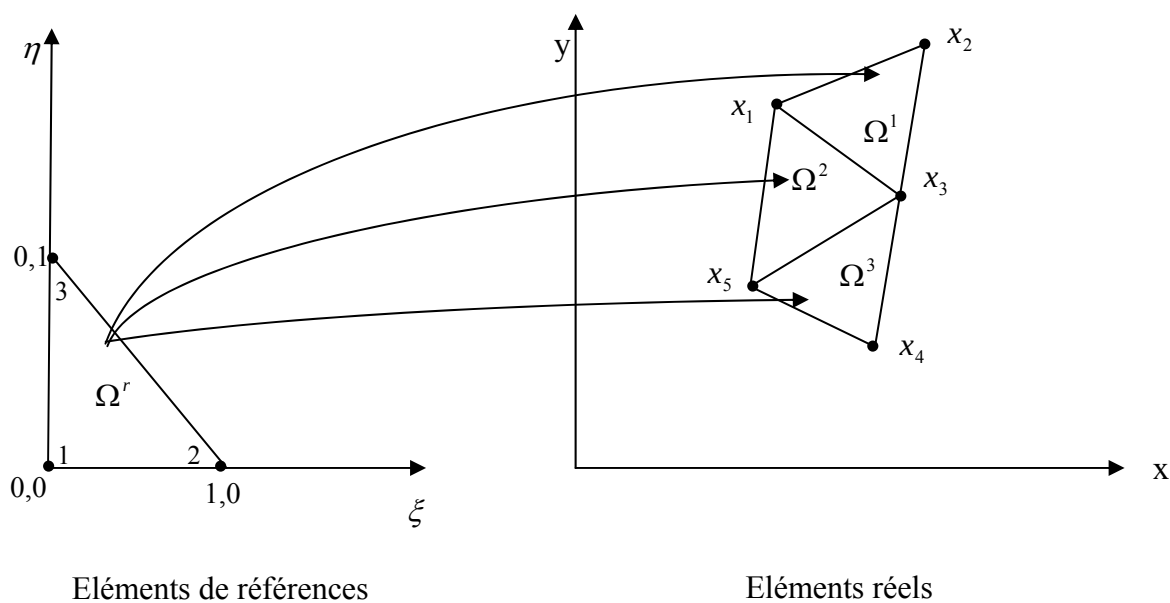
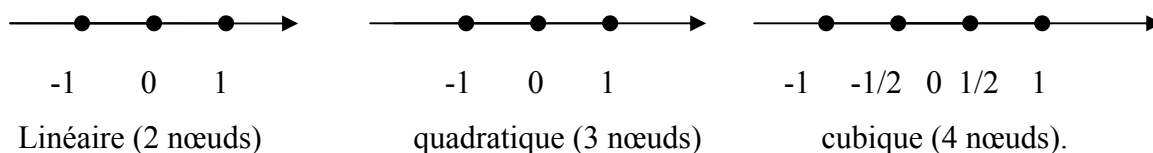


Figure III.4 : Relation entre l'élément réelle et l'élément de référence

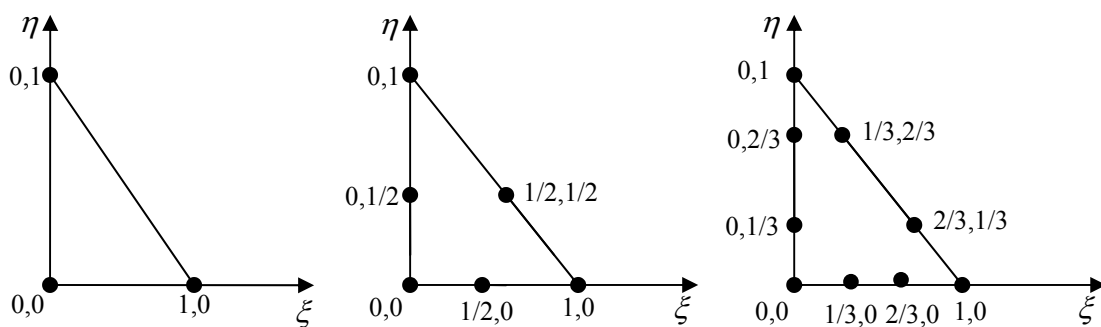
Nous présentons ci- dessous la forme et la définition analytique des éléments de référence correspondant aux éléments classiques [14].

Eléments de referens à une dimension :

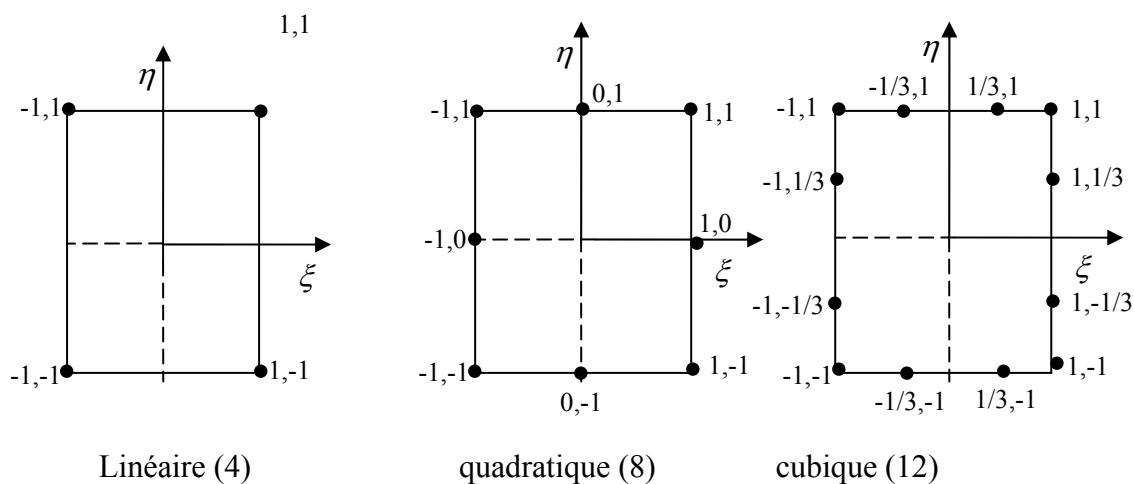


Eléments de référence à deux dimensions :

Eléments triangulaires:

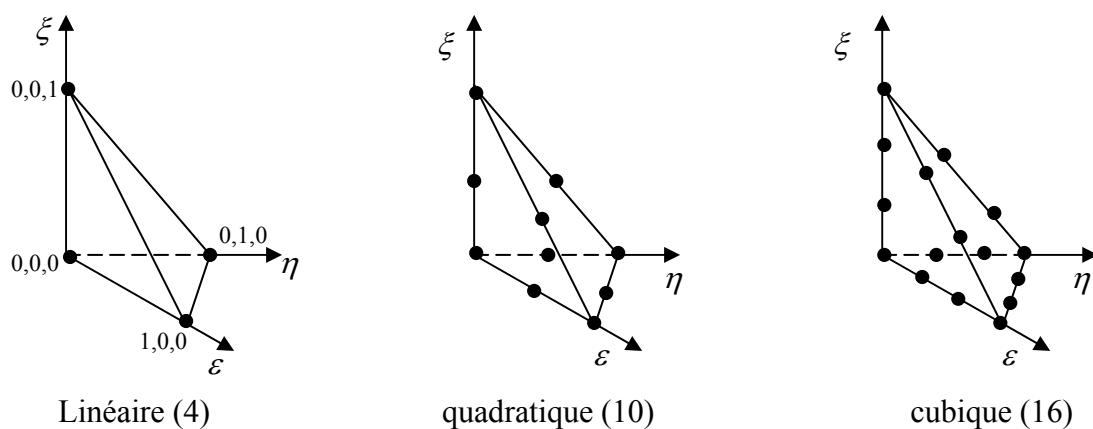


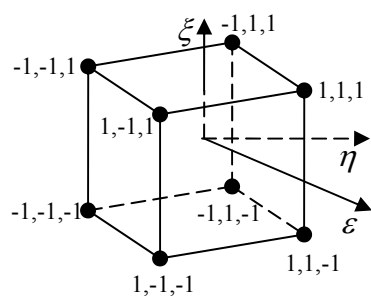
Eléments carrés:



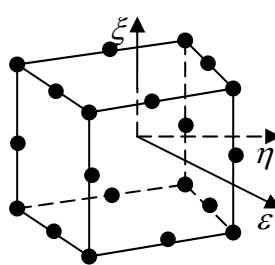
Eléments de référence à trois dimensions :

-Éléments tétraédriques :

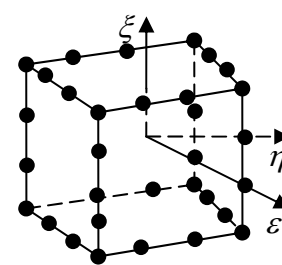


-Éléments cubiques :

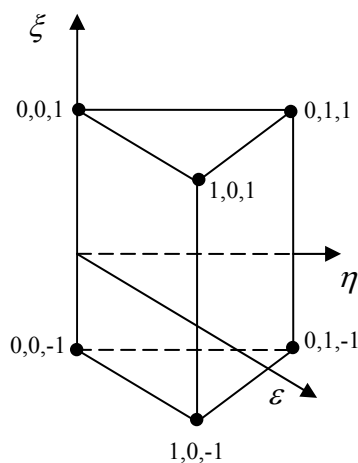
linéaire (8)



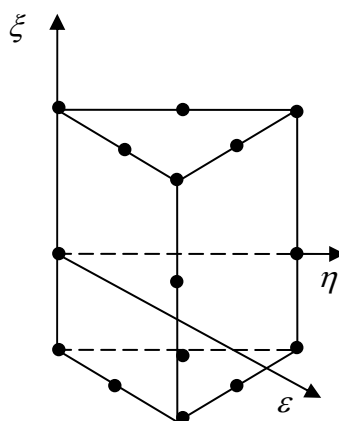
quadratique (20)



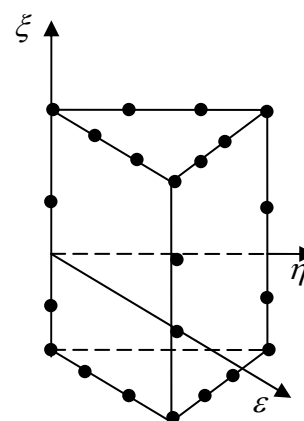
cubique (32)

-Éléments prismatiques :

linéaire (6)



quadratique(15)



cubique(24)

III.7- Formulation intégrale :

Dans cette partie, nous nous intéressons aux formulation intégrales (ou variationnelles) des équations de comportement de système physique. La méthode des éléments finis discrétise une formulation intégrale pour conduire à un système d'équations algébriques qui fournit une solution approchée du problème.

III.7.1- Problèmes équilibre, de valeurs propres et de propagation :

Les problèmes qui concernent les systèmes discret et continus peuvent être classés en trois catégories que nous allons définir brièvement en décrivant les types des équations correspondant à chacun d'eux.

III.7.1.1- Problème d'équilibre ou de valeurs aux limites :

Ils consistent à calculer u dans un cas stationnaire. Pour un système discret, les équations de comportement peuvent en générale s'écrire sous forme matricielle :

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (\text{III.16})$$

Où : $[K]$ est une matrice caractérisant le système.

$\{U\}$ sont les variables inconnues.

$\{F\}$ sont les sollicitations connues.

Le comportement d'un système continu est décrit par les équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} E(u) + f_{\Omega} = 0 & \text{sur un domaine } \Omega \\ \mathcal{G}(u) = f_{\partial\Omega} & \text{sur la frontière } \partial\Omega \text{ de } \Omega \end{cases}$$

Où : E et $\mathcal{G}$ sont des opérateurs différentiels caractérisant le système

u sont les fonctions inconnues.

f_{Ω} et $f_{\partial\Omega}$ sont des fonctions connues dites sollicitations.

III.7.1.2- Problème de valeurs propres ou de valeurs critiques :

Ils constituent une extension d'un problème d'équilibre dans laquelle nous évaluons u correspondant à des valeurs critiques de certains paramètres dites valeurs propres. Les équations correspondantes s'écrivent :

- Pour un système discret : $[k]\{U\} = \lambda[M]\{U\}$ où $[M]$ est la matrice masse.

- Pour un système continu :
$$\begin{cases} E_1(u) = \lambda E_2(u) & \text{sur le domaine } \Omega \\ \mathcal{G}_1(u) = \lambda \mathcal{G}_2(u) & \text{sur la frontière } \partial\Omega \end{cases}$$

Où $E_1, E_2, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ sont des opérateurs différentiels.

III.7.1.3- Problèmes de propagation ou de valeurs initiales :

Ils consistent à évaluer $u(x, t)$ pour $t > t_0$ dans un système non stationnaire $u(x, t_0)$ étant connu.

- Pour un système discret : $[M] \frac{d^2}{dt^2} \{U\} + [C] \frac{d}{dt} \{U\} + [K] \{U\} = \{F(t)\}$ pour $t > t_0$

Avec les condition initiales : $\{U\} = \{U_0\}$ et $\frac{d}{dt} \{U\} = \{\dot{U}_0\}$ pour $t = t_0$

Où $[C]$ est la matrice d'amortissement.

- Pour un système continu : $u = u_0$ et $\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}_0$ pour $t = t_0$

Avec les conditions initiales :
$$\begin{cases} m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + E(u) + f_\Omega = 0 & \text{sur } \Omega \\ \mathcal{G}(u) = f_{\partial\Omega} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On peut définir quelques notions couramment employées pour caractériser les équations des systèmes physiques :

- Un système discret est linéaire si les termes de $[k]$, $[M]$, $[C]$ et $\{F\}$ sont des constantes indépendantes de u .
- Un système continu est linéaire si les expressions $E(u)$ et $\mathcal{G}(u)$ sont linéaires en u et ses dérivées. De plus, f_Ω , $f_{\partial\Omega}$, m , c sont indépendantes de u et de ses dérivées. Nous pouvons alors écrire : $E(u) = [E]\{U\}$; $\mathcal{G}(u) = [\mathcal{G}]\{U\}$ où $[E]$ et $[\mathcal{G}]$ sont des matrices d'opérateurs différentiels indépendants de u .

Par exemple pour l'opérateur laplacien :

$$E(u) = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right] \cdot u$$

- Un opérateur différentiel E est dit homogène si : $E(u = 0) = 0$.
- Un système d'équations linéaires aux dérivées partielles : $[E]\{u\} + \{f_\Omega\} = 0$ est dit homogène si : $\{f_\Omega\} = 0$, et les conditions aux limites : $[\mathcal{G}]\{u\} = \{f_{\partial\Omega}\}$ sont dites homogènes si $\{f_{\partial\Omega}\} = 0$.
- Un système différentiel linéaire est auto-adjoint ou symétrique si :

$$\int_r \langle u > [E] \{ \Omega^e \} d\Omega = \int_r \langle \Omega^e > [E] \{ u \} d\Omega \quad (\text{III.17})$$

Où u et Ω^e sont des fonctions suffisamment dérivable sur Ω , qui satisfont les conditions aux limites homogènes :

$$\mathcal{G}(u) = \mathcal{G}(\Omega^e) = 0 \quad (\text{III.18})$$

-Un système différentiel linéaire est positif si [14] :

$$\int_{\Omega} \langle u \rangle [E] \{u\} d\Omega \geq 0 \quad (\text{III.19})$$

III.7.2- Transformation des formes intégrales:

III.7.2.1- Intégration par parties :

L'intégration par parties permet de transformer une forme intégrale complexe à des intégrales simples :

-Pour une dimension :

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi \frac{du}{dx} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\psi}{dx} u dx + (\psi u) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi \frac{d^2 u}{dx^2} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\psi}{dx} \frac{du}{dx} dx + \left(\psi \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

-Pour deux dimensions [18] :

$$\int_A \psi \frac{du}{dx} dx dy = - \int_A \frac{d\psi}{dx} u dx dy + \oint_{\partial\Omega} \psi u dy = - \int_A \frac{d\psi}{dx} u dx dy + \oint_{\partial\Omega} \psi u / \partial\Omega$$

$$\int_A \frac{\partial \psi}{\partial x} u dx dy = - \oint_A \frac{\partial \psi}{\partial y} u dx du - \oint_{\nabla\Omega} \psi u dx = - \oint_A \frac{\partial \psi}{\partial y} u dx du - \oint_{\nabla\Omega} \psi u m d(\partial\Omega)$$

$$\int_A \psi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy = - \oint_A \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx du + \oint_{\nabla\Omega} \psi \frac{\partial u}{\partial x} / d(\partial\Omega)$$

$$\int_A (\psi \Delta u - u \Delta \psi) dx dy = \oint_{\partial\Omega} \left(\psi \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d(\partial\Omega) \quad \text{Où} \quad \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

III.7.2.2- Forme intégrale faible :

L'intégration par parties, fournit des formes intégrales dites faibles qui présentent les avantages suivants :

- l'ordre maximum des dérivées de u qui apparaissent dans la forme intégrale diminue. Les conditions de dérivabilité de u sont donc moins fortes ;
- certaines des conditions aux limites qui apparaissent dans la forme faible peuvent être prises en compte dans la formulation intégrale au lieu d'être satisfaites identiquement par u .

Par contre l'intégration par parties fait apparaître des dérivées de ψ . Donc les conditions de dérivabilité de ψ augmentent. De plus, ψ peut satisfaire les conditions sur une partie de la frontière de manière à faire disparaître certains termes de contour.

Après une intégration par parties, on trouve :

$$W = -\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \psi f_{\Omega} \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial u}{\partial n} d(\partial\Omega) + \int_{\partial\Omega_u} \psi \frac{\partial u}{\partial n} d(\partial\Omega) = 0$$

Les fonctions ψ et u doivent être dérivables une fois. Nous avons maintenant des termes de contour sur $\partial\Omega_f$ et $\partial\Omega_u$. Ceci permet d'utiliser la condition imposée à u

sur $\partial\Omega_f$: $\frac{\partial u}{\partial n} = f_{\partial\Omega} - \alpha u$ pour remplacer : $\int_{\partial\Omega_f} \psi \frac{\partial u}{\partial n} d(\partial\Omega)$ par $\int_{\partial\Omega_f} \psi (f_{\partial\Omega} - \alpha u) d(\partial\Omega)$

De plus, nous pouvons faire disparaître le terme contour sur $\partial\Omega_u$ en imposant $\psi = 0$ sur $\partial\Omega_u$. La forme intégrale faible s'écrit alors :

$$W = -\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \psi f_{\Omega} \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega_f} \psi (f_{\partial\Omega} - \alpha u) d(\partial\Omega) = 0$$

Où u et ψ doivent satisfaire les conditions aux limites : $u = u_{\partial\Omega_u}$ sur $\partial\Omega_u$ et $\psi = 0$ sur $\partial\Omega_u$.

Après deux intégrations par parties de la forme intégrale de l'équation de poisson :

$$W = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) u + \psi f_{\Omega} \right) d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \left(\psi \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial n} u \right) d(\partial\Omega) = 0$$

Si nous choisissons des fonctions qui satisfont $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$ en tout point de Ω , la

forme 2 ne contient plus d'intégrale de volume si $f_{\Omega} = 0$:

$$W = \oint_{\partial\Omega} \left(\psi \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial n} u \right) d(\partial\Omega) = 0$$

Cette expression constitue la base de la méthode des équations intégrales de contour [14].

III.8- Assemblage de la forme globale discrétisée W :

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire la matrice globale $[K]$ et le vecteur global des sollicitations $\{F\}$ à partir des matrices élémentaires $[k]$ et des vecteurs élémentaires des sollicitations $\{f\}$. Nous avons plusieurs méthodes d'assemblage [14] :

III.8.1- Aassemblage par expansion des matrices élémentaires :

Chaque forme intégrale élémentaire W^e s'écrit sous la forme discrétisée:

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle ([k] \{u_n\} - \{f\}) \quad (\text{III.20})$$

Où $[k]$ est la matrice élémentaire de l'élément ;

$\{f\}$ est le vecteur des sollicitations de l'élément, il est la somme des sollicitations de volume et des sollicitations de surface.

Les vecteurs $\langle \delta u_n \rangle$ et $\{u_n\}$ sont différents pour chaque élément, car ils contiennent les variables nodales de l'élément e .

Soient $\langle \delta U_n \rangle$ et $\{U_n\}$ les vecteurs formés par l'ensemble des variables nodales du domaine complet Ω . $\langle \delta u_n \rangle$ et $\{u_n\}$ contiennent les termes de $\langle \delta U_n \rangle$ et $\{U_n\}$ qui correspondent à l'élément e :

➤ Variables globales :

$$\langle \delta U_n \rangle = \langle \delta u_i \dots \delta u_j \dots \delta u_k \dots \delta u_n \rangle$$

➤ Variables élémentaires :

$$\langle \delta u_n \rangle = \langle \delta u_i \dots \delta u_j \dots \delta u_k \rangle$$

Où $\delta u_i, \delta u_j, \delta u_k$ sont les variables nodales de l'élément [14].

III.8.1.1- Vecteurs élémentaire $\{u_n\}$ et global $\{U_n\}$:

Considérons le domaine Ω présenté par les 2 éléments triangulaires ayant un seul degré de liberté par nœud (Fig. III.5):

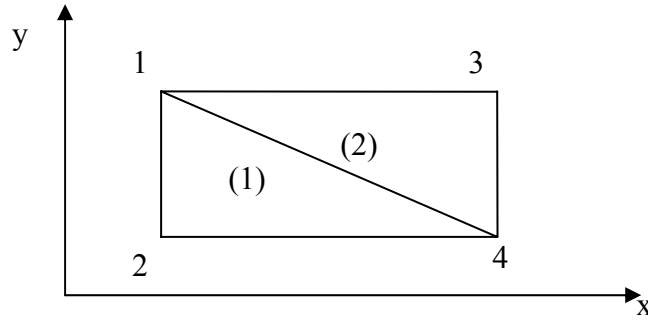


Figure III.5 : Illustration de l'assemblage par un exemple à deux éléments.

Les vecteurs globaux sont : $\langle \delta U_n \rangle = \langle \delta U_1 \delta U_2 \delta U_3 \delta U_4 \rangle$

$$\langle U_n \rangle = \langle u_1 u_2 u_3 u_4 \rangle$$

Les vecteurs élémentaires de l'élément (1) sont :

$$\langle \delta u_n^{(1)} \rangle = \langle \delta u_1 \delta u_2 \delta u_4 \rangle$$

$$\langle u_n^{(1)} \rangle = \langle u_1 u_2 u_4 \rangle$$

Les vecteurs élémentaires de éléments (2) sont :

$$\langle \delta u_n^{(2)} \rangle = \langle \delta u_1 \delta u_4 \delta u_3 \rangle$$

$$\langle u_n^{(2)} \rangle = \langle u_1 u_4 u_3 \rangle$$

Les formes intégrales élémentaires s'écrivent :

$$W^{(1)} = \langle \delta u_n^{(1)} \rangle \left([k^{(1)}] \{u_n^{(1)}\} - \{f^{(1)}\} \right)$$

$$W^{(2)} = \langle \delta u_n^{(2)} \rangle \left([k^{(1)}] \{u_n^{(1)}\} - \{f^{(2)}\} \right)$$

Nous remarquons qu'une variable nodale u_n (ou δu_n) apparaît souvent dans plusieurs vecteurs élémentaires, puisqu'un nœud peut appartenir à plusieurs éléments, c'est le cas des nœuds 1 et 4. Il est nécessaire qu'une telle variable nodale soit exprimée dans le même repère pour tous les éléments.

La forme intégrale globale discrétisée W est la somme des formes élémentaires discrétisées W^e , cette opération constitue l'assemblage :

$$W = \sum_{\text{éléments}} W^e$$

$$W = \sum_{\text{éléments}} \langle \delta u_n \rangle ([k] \{u_n\} - \{f\})$$

Nous cherchons à mettre cette expression sous la forme :

$$W = \langle \delta U_n \rangle ([K] \{U_n\} - \{F\}).$$

Pour cela, il suffit de réécrire les formes élémentaires W^e en fonction de $\{U_n\}$ et

$$\langle \delta U_n \rangle : W^e = \langle \delta U_n \rangle ([K^e] \{U_n\} - \{F^e\}).$$

La matrice $[K^e]$ est construite par expansion de la matrice $[k]$ grâce à des insertions de lignes et de colonnes de zéros. $[k]$ a pour dimension le nombre de degrés de liberté de l'élément. $[K^e]$ a pour dimension le nombre de degrés de liberté total. De même $\{F^e\}$ est construit par insertion de zéros dans $\{f\}$. Détaillons les opérations d'expansion de $[k]$ en $[K^e]$ et de $\{f\}$ en $\{F^e\}$:

III.8.1.2- expansion de $[k]$:

L'expansion de $[k]$ se fait en deux étapes, l'une consiste à remplacer $\{u_n\}$ par $\{U_n\}$ et l'autre à remplacer $\langle \delta u_n \rangle$ par $\langle \delta U_n \rangle$.

Considérons l'expression :

$$W^e = \langle \delta u_I \quad \delta u_J \rangle \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I \\ u_J \end{Bmatrix} = \langle \delta u_n \rangle [k] \{u_n\}$$

Le vecteur global des variables nodales est :

$$\langle U_n \rangle = \langle u_1 \quad u_2 \dots u_I \quad u_{I+1} \dots u_J \quad u_{J+1} \dots u_n \rangle$$

Pour que W^e reste inchangée si l'on remplace $\{u_n\}$ par $\{U_n\}$, il faut remplacer $d[k]$ de dimension (2×2) par une matrice $[K']$ de dimensions $(2 \times n)$ dont la colonne I est $\begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{Bmatrix}$, la colonne J est $\begin{Bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \end{Bmatrix}$ et dont toutes les autres colonnes sont nulles:

$$W^e = \langle \delta u_I \delta u_J \rangle \begin{bmatrix} 00 \dots \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{Bmatrix} 0 \dots \begin{Bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \end{Bmatrix} 0 \dots 0 \\ 00 \dots \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \end{Bmatrix} 0 \dots \begin{Bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \end{Bmatrix} 0 \dots 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_I \\ u_{I+1} \\ \vdots \\ u_J \\ u_{J+1} \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (III.21)$$

III.8.1.3- Remplacement de $\langle \delta u_n \rangle$ par $\langle \delta U_n \rangle$:

Pour que W^e reste inchangée si l'on remplace $\langle \delta u_n \rangle$ par $\langle \delta U_n \rangle$, il faut encore remplacer cette matrice $[K']$ par la matrice $[K^e]$ de dimensions $(n \times n)$ dont la ligne I est la première ligne de $[K']$, et dont les autres lignes sont nulles:

$$\langle \delta U_n \rangle = \langle \delta u_1 \delta u_2 \dots \delta u_I \delta u_{I+1} \dots \delta u_J \dots \rangle W^e = \langle \delta u_n \rangle$$

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & k_{11} & \dots & k_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & k_{21} & \dots & k_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \{U_n\} = \langle \delta U_n \rangle [K^e] \{U_n\} \quad (III.22)$$

III.8.1.4- Expansion de $\{f\}$:

$$\text{Considérons l'expression } W^e = \langle \delta u_I \quad \delta u_J \rangle \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \langle \delta u_n \rangle \{f\}$$

Pour que W^e reste inchangée si l'on remplace $\langle \delta u_n \rangle$ par $\langle \delta U_n \rangle$, il faut remplacer $\{f\}$ de dimension 2 par le vecteur $\{F^e\}$ de dimension n dont le terme I est f_1 , le terme J est f_2 et dont autres termes sont nuls:

$$W^e = \langle \delta U_n \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1 \\ \vdots \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \langle \delta U_n \rangle \{F^e\} \quad (III.23)$$

$(n \times 1)$

III.8.2- Technique d'assemblage :

Nous avons vu au paragraphes précédents, que l'assemblage comporte deux étapes :

- Construction de la matrice étendue $[K^e]$ et du vecteur étendu $\{F^e\}$ de chaque élément selon la forme générale : $[K]\{U_n\} = \{F\}$;
- Addition des matrices et des vecteurs étendus.

Ces deux étapes sont en pratique effectuées simultanément. Pour standardiser les opérations d'assemblage, définissons pour chaque élément la table de LOCALisation élémentaire LOCE qui donne la position de chaque terme de $\{u_n\}$ dans $\{U_n\}$ donc également la position de chaque terme de $\langle \delta u_n \rangle$ dans $\langle \delta U_n \rangle$. La dimension de la table LOCE est égale au nombre de degrés de liberté de l'élément n_{de} .

L'algorithme général qui effectue les deux étapes de l'assemblage est le suivant :

- ✓ initialiser les termes de $[k]$ et $\{F\}$ à zéro
- ✓ pour chaque élément e :

- Ajouter chaque terme K_{ij} de sa matrice élémentaire au terme K_{ij} de la matrice globale :

$$K_{ij} = K_{ij} + K_{ij} \quad i=1,2,\dots,n_{de}$$

$$j=1,2,\dots,n_{de}$$

- Ajouter chaque terme f_i du vecteur élémentaire des sollicitations au terme F_I du vecteur global [14] :

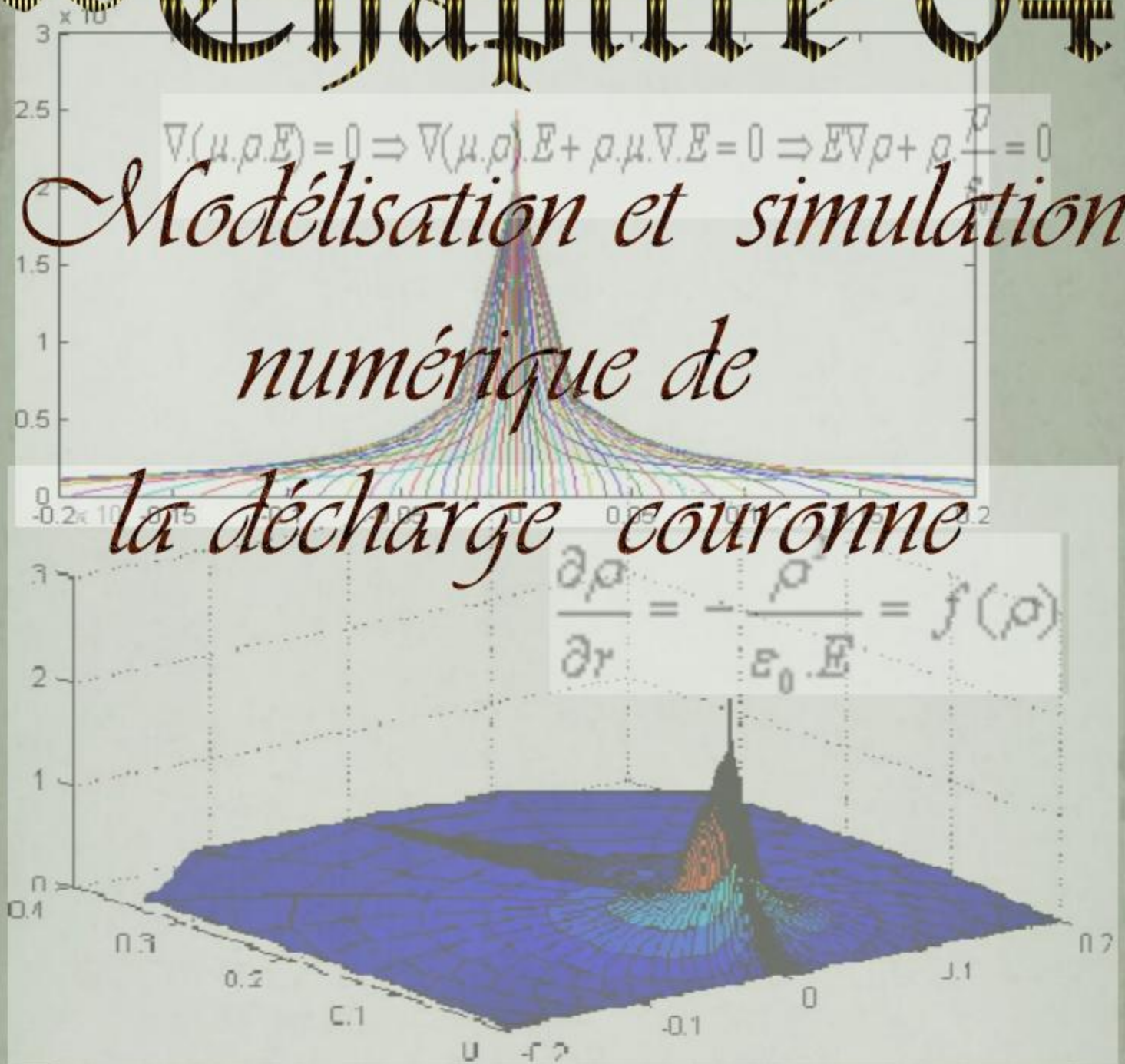
$$F_I = F_I + f_i \quad i=1,2,\dots, n_{de}$$

III.10- Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté les fondements théoriques de la méthode des éléments finis. C'est une méthode de programmation très utilisable dans plusieurs domaines, si nous avons un problème physique sous forme d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles, à satisfaire en tout points d'un domaine Ω . Nous avons fait la formulation variationnelle du problème en divisant le domaine Ω en sous domaine (le maillage). A après on fait l'approximation des inconnus par EF et l'assemblage pour trouver la solution approchée.

05 Chapitre 04

Modélisation et simulation numérique de la décharge couronne



*Le livre de la vie est le livre suprême
Qu'on ne peut ni fermer ni ouvrir à son choix
Le passage attachant ne s'y lit pas deux fois
Et le feuillet fatal se tourne de lui-même
On voudrait revenir à la page où l'on aime
Mais la page où l'on meurt est déjà sous nos doigts.*

IV.1- Introduction :

L'étude scientifique d'un phénomène physique passe par la formulation d'une ou plusieurs lois sous forme d'équations mathématiques qui relie les différentes variables intervenant dans le déroulement du phénomène en question.

Une fois le problème bien défini et bien formulé, il faut générer une grille de calcul nécessitent bien souvent de la place, des moyens et beaucoup de temps. La nature de la grille de calcul dépend de la nature de la méthode numérique utilisée. Aujourd'hui, presque toutes les méthodes sont liées avec les développements de la programmation et la simulation informatique. Cette dernière est un moyen particulièrement efficace qui permet de limiter les expériences. De plus la modélisation numérique présente la possibilité d'ouvrir des perspectives par le traitement d'un plus grand nombre de paramètres ajustables, qui peuvent indiquer les performances limites auxquelles on peut s'attendre (par exemple la région où le champ électrique entre deux électrodes est élevé au point d'atteindre une tension de claquage,...). Ces points sont d'autant plus critiques qu'ils sont difficiles à prévoir et parfois même à mesurer. C'est dans une optique prévisionnelle et dans un souci économique autant qu'exploratoire qu'on fait de la simulation.

En régime stationnaire, la formation des ions par la décharge couronne est fonction du champ électrostatique. La solution du problème appliquée à l'équation de Poisson satisfaite par une fonction potentielle qui décrit complètement les champs statiques, en incluant l'effet d'une distribution de charges électriques, elles-mêmes sources de champs. Cette dernière n'est pas connue au préalable et est déterminée par le développement de l'équation de continuité du courant.

Le modèle que nous avons utilisé pour la résolution numérique est celui utilisé par Abdel-Salam et Al-Hamouz tout en tenant compte de la longueur de l'avalanche négligée par ces auteurs. Abdel-Salam et Al-Hamouz [19,20], qui sont les premiers à proposer en 1993 et 1995 une méthode itérative pour la résolution des équations du milieu ionisé en incluant la diffusion. En 1998 Al-Hamouz, a supposé la non constance de la mobilité ionique et a obtenu des résultats très satisfaisants via les résultats expérimentaux.

En outre une modification est apportée, dans laquelle nous avons introduit le potentiel correspondant au champ critique du minimum d'ionisation comme troisième condition aux limites dans la formulation en éléments finis.

IV.2- Modèle mathématique :

La conception des systèmes électrostatique est généralement basée sur La formulation des équations du Maxwell. La théorie de l'électricité ne présente que les paramètres de la physique. A partir de la loi du Gauss, la divergence de l'intensité de champ électrique est liée à la densité de charge de l'espace ρ comme suit :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad (\text{IV-1})$$

où

- ε_0 est la permittivité de vide.
- $\vec{E}$ est le vecteur champ électrique (V/m). Le signe dans l'équation (IV-1) est positif si l'électrode active est soumise à une tension de polarité positive et négative dans le cas contraire.
- ρ est la densité de la charge d'espace (C/m^3), elle est toujours positive.

En même temps, la continuité de la densité de courant ou le vecteur ionique $\vec{J}$ d'écoulement est homogène donne :

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (\text{IV-2})$$

où :

$\vec{J}$ est le vecteur de la densité de courant (A/m^2).

L'équation (IV-2) montre que aucune source de charge locale ne peut être un conducteur coronating.

Le vecteur ionique d'écoulement est déterminé par le champ électrique :

$$\vec{J} = \mu \rho \vec{E} \quad (\text{IV-3})$$

Où :

μ est la mobilité des ions positifs ou négatifs selon la polarité de l'électrode active ($m^2/V.s$).

Le signe dans (IV-3) est positif si la tension appliquée est de polarité positive et négative dans le cas contraire.

La relation locale entre le champ électrique et le potentiel électrique (V) est :

$$\vec{E} = -\text{grad}V = -\vec{\nabla}V. \quad (\text{IV-4})$$

En remplaçant l'expression du champ donnée par (IV-4) dans (IV-1), on obtient l'équation suivante :

$$\nabla^2 V = \mp \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{IV-5})$$

- L'équation (IV-5) est l'équation de Poisson
- Le signe dans (IV-5) est négatif si l'électrode active est soumise à une tension de polarité négative et positive dans le cas contraire.

En réalité, il est extrêmement difficile de trouver une solution exacte de ces équations à cause de leur nature non linéaire et c'est ainsi que des approches simplificatrices basées sur des modèles hypothétiques introduits pour trouver les solutions aux problèmes réels.

La solution analytique exacte à ces équations peut seulement être obtenue pour les plans parallèles, câble coaxial, et les sphères concentriques coaxiales. Par conséquent, une solution numérique est prévue comme outil pour la solution de cet ensemble d'équations. Les prétentions de simplification et les conditions de frontière exigées sont comme suit [21] :

IV.2.1- Simplification Des Prétentions:

- 1) Généralement, on suppose que les électrodes sont propres et le fil est ronds
- 2) La décharge corona est distribuée uniformément au-dessus de la surface des fil ; si l'électrode de corona a un potentiel au-dessus d'une certaine valeur, appelée le niveau de seuil, la composant normal du champ électrique reste constante au de la de la valeur E_0 . Empiriquement, E_0 est exprimé en kilovolts par mètre.

$$E_0 = 30\eta \left(1 + \sqrt{9.06 / R_0} \cdot 10^{-2}\right) \quad (\text{IV-6})$$

Où R_0 est le rayon de fil en centimètres et η est le facteur de la surface irrégularité ($\eta=1$ pour les fils lisse).

3) la mobilité ionique est constante (indépendante du champ électrique) et la diffusion ionique est négligeable.

IV.2.2- Les conditions de Frontière:

- 1) le potentiel au plan est égal à zéro.
- 2) le potentiel sur le fil est égale à la tension appliquée.
- 3) le champ électrique au voisinage du fil est égal au champ critique E_0 .

IV.3- Différentes étapes de résolution numérique:

La configuration d'électrodes à simuler est la configuration fil-plan. Le fil est de rayon R_0 , distant d'une hauteur H par rapport au plan. L'électrode active étant soumise à une tension de polarité positive. La différence entre les deux cas réside dans les grandeurs physiques telles que la valeur de la tension seuil, la longueur d'avalanche et la mobilité des ions. L'organigramme de résolution du problème considéré est donné par la figure IV-1. Les différentes étapes suivies pour la résolution numérique sont détaillées dans ce qui suit.

IV.3.1- Etape 1 : Génération du maillage électrostatique:

Le conducteur est considéré de longueur infinie. Ainsi, le problème se ramène à une configuration bidimensionnelle dans le système (X,Y). La configuration fil-plan est une configuration ouverte non limitée, on est donc amené à limiter notre domaine d'étude en créant des frontières artificielles prises égale à $0.2m$ selon l'axe des X, et $0.4m$ selon l'axe des Y (figure IV-2). A cause de la symétrie par rapport à l'axe des Y, une moitié des lignes de champ est tracée en absence de la charge d'espace et cela en utilisant la méthode des images électriques décrite comme suit [22]:

Sous tension positive V_{app} , appliquée à l'électrode active (le fil), le conducteur est simulé par

une charge $-q$, telle que : $q = \frac{2\pi\epsilon_0 V_{app}}{\ln((H+b)/R_0)}$ et son image $-q$ (figure IV-3).

Avec $b = \sqrt{H^2 - R_0^2}$ est la hauteur de q au dessus du plan.

Au point 1 de coordonnées (x_1, y_1) placé sur le frontière de conducteur, on peut évaluer le potentiel V , les composantes E_{x1} , E_{y1} du champ électrique selon les axes X et Y et le champ résultant E_{r1} comme suit [23] :

$$\begin{aligned} X(i) &= R \cdot \sin(teta(i)) \\ Y(i) &= H - R \cdot \cos(teta(i)) \\ V &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned} \quad (IV-7)$$

$$E_{x1} = \left(\frac{q}{2.\pi.\epsilon_0} \left(\frac{x_1}{R_1^2} - \frac{x_1}{R_2^2} \right) \right) \quad (IV-8)$$

$$E_{y1} = \left(\frac{q}{2.\pi.\epsilon_0} \left(\frac{y_1 - y_q}{R_1^2} - \frac{y_1 + y_q}{R_2^2} \right) \right) \quad (IV-9)$$

$$E_{r1} = \sqrt{E_{x1}^2 + E_{y1}^2} \quad (IV-10)$$

$$\text{Avec :} \quad R_1^2 = x_1^2 + (y_q - y_1)^2 \quad (IV-11)$$

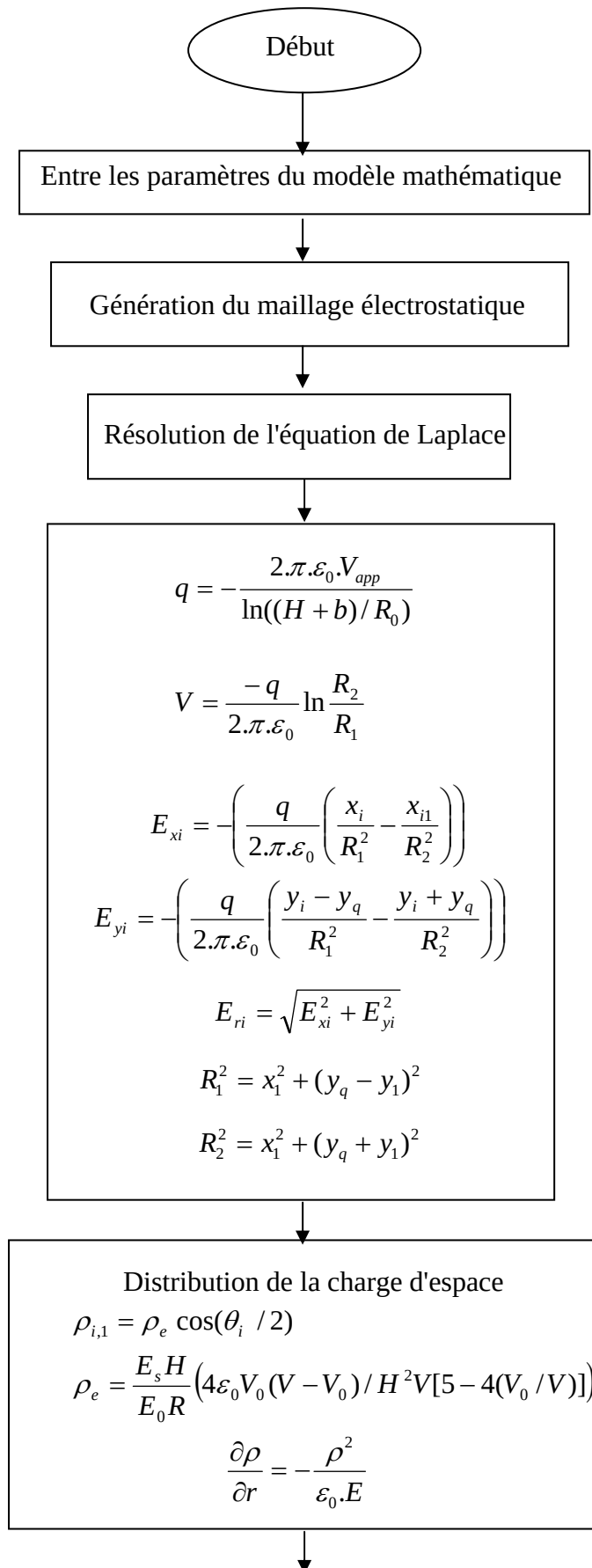
$$R_2^2 = x_1^2 + (y_q + y_1)^2 \quad (IV-12)$$

Les coordonnées (x_2, y_2) au point 2 à une distance additionnelle ΔL du point 1 le long de la direction de E_{r1} sont exprimées par :

$$x_2 = x_1 + \frac{E_{x1}}{E_{r1}}.\Delta L \quad (IV-13)$$

$$y_2 = y_1 + \frac{E_{y1}}{E_{r1}}.\Delta L \quad (IV-14)$$

Au point 2, la même procédure est appliquée pour atteindre le point 3, elle continue jusqu'à ce qu'une ligne de champ complète soit tracée (figure IV-4). En polarité positive de l'électrode la même méthodologie de traçage surgit mais les lignes de champ dans ce cas, dérivent du conducteur pour atteindre le plan (ou la frontière artificielle) et les équations (IV-6)-(IV-8)) seront accompagnées d'un signe moins. Cependant, il est plus facile de tracer les lignes de champ en commençant de la surface du conducteur, c'est ce que nous avons fait. Une fois les lignes du champ tracées, les coordonnées des points avec les valeurs du potentiel seront enregistrées. En connectant les points de même potentiel sur toutes les lignes du champ, on obtient des contours équipotentiels. Les points d'intersection des lignes du champ et des contours équipotentiels représentent les nœuds du maillage (figure IV-5). Les valeurs du potentiel et du champ électriques aux nœuds du maillage sont arrangées dans les matrices V et E notées $V^{(1)}$ et $E^{(1)}$ pour leur première estimation.



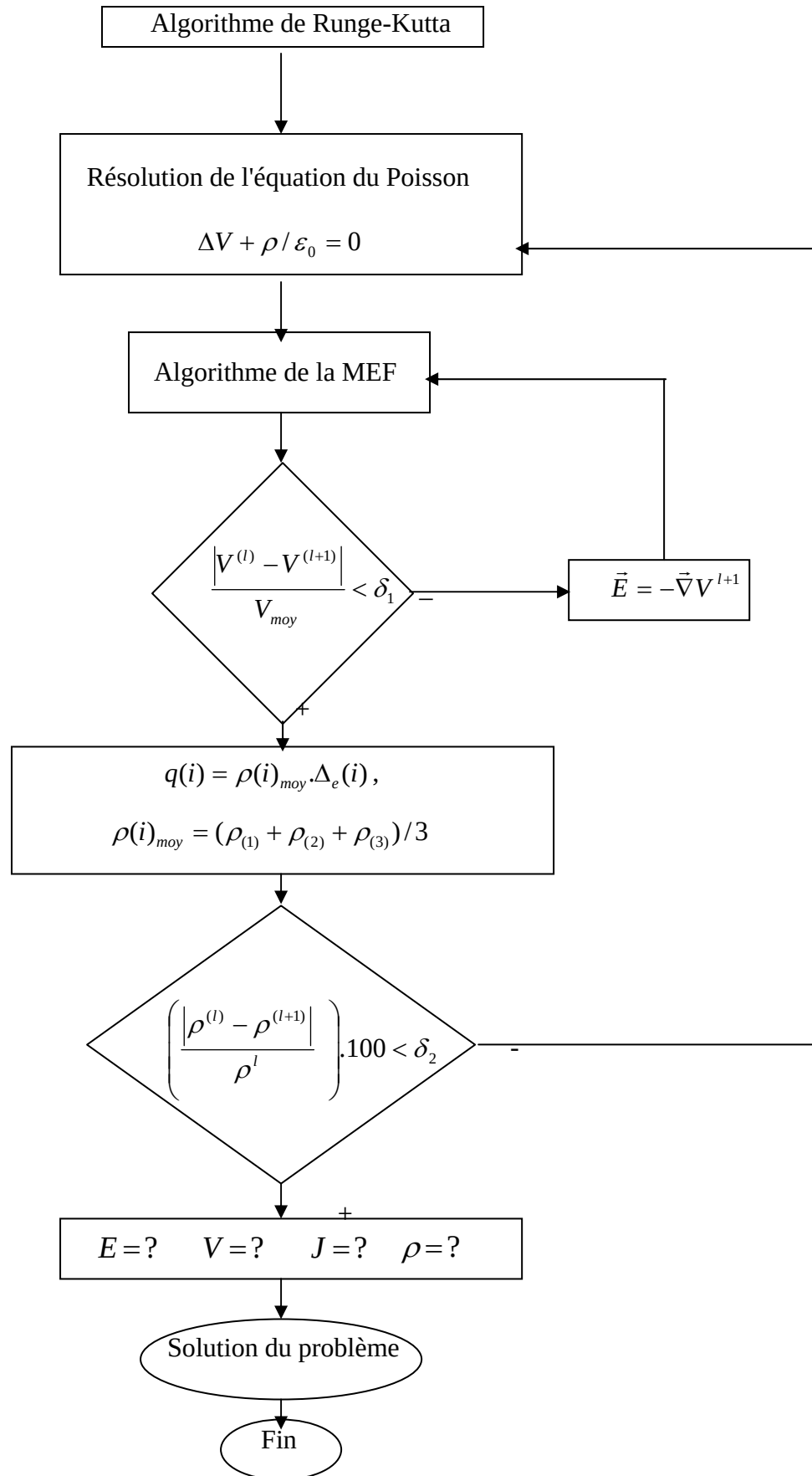


Figure IV-1 Organigramme des étapes de résolution du problème de la décharge couronne

IV.3.2 - Etape 2 : Evaluation d'erreurs:

Cette étape est en quelque sorte une étape d'évaluation d'erreurs. En effet, les résultats obtenues de $V^{(1)}$ et $E^{(1)}$ dans l'étape 1 seront comparés à ceux que l'on obtiendra en utilisant la méthode des éléments finis (MEF). Il s'avère que pour commettre moins d'erreurs, on est amené à réestimer le champ électrique $E^{(1)}$ aux nœuds du maillage par la méthode d'interpolation /extrapolation et ce résultat sera utilisé pour estimer la densité de la charge d'espace. La méthode d'interpolation /extrapolation sera aussi utilisée pour estimer le champ à partir des valeurs du potentiel déterminées par la MEF. Dans cette étape on présentera ces méthodes utilisées. Le traité de la MEF se fera pour la résolution de l'équation de Poisson et l'équation de Laplace n'est qu'un cas simplifié (absence de la charge d'espace $\rho = 0$).

IV.3.2.1- Méthode d'interpolation / extrapolation:

En simulation numérique, l'interpolation est une opération mathématique permettant de construire une courbe à partir de la donnée d'un nombre fini de points, ou une fonction à partir de la donnée d'un nombre fini de valeurs. La solution du problème d'interpolation passe par les points prescrits, et, suivant le type d'interpolation, il lui est demandé de vérifier des propriétés supplémentaires. Ainsi le type le plus simple d'interpolation est l'interpolation linéaire, qui consiste à "joindre les points" donnés.

Pour pouvoir calculer le champ au nœud (i, j) dont i et j sont respectivement le $i^{\text{ème}}$ contour équipotentiel et la $j^{\text{ème}}$ ligne du champ, un polynôme d'interpolation $f(r)$ d'ordre deux du potentiel calculé aux nœuds $(i-1, j)$, (i, j) , $(i+1, j)$ a été formulé. La variable r est la longueur mesurée le long de la ligne du champ, elle commence de la surface du conducteur et se termine au nœud d'interpolation. L'intensité du champ électrique au nœud désiré est obtenue par dérivation du polynôme d'interpolation selon r . En ce qui est des champs aux nœuds à la surface du conducteur et sur le plan et les frontières artificielles, ils sont déterminés par extrapolation du polynôme d'interpolation des potentiels aux nœuds respectivement $(1, j)$, $(2, j)$, $(3, j)$, et $(Nbmpo+1, j)$, $(Nbmpo, j)$, $(Nbmpo-1, j)$ avec $Nbmpo+1$ est le nombre total de contours équipotentiels.

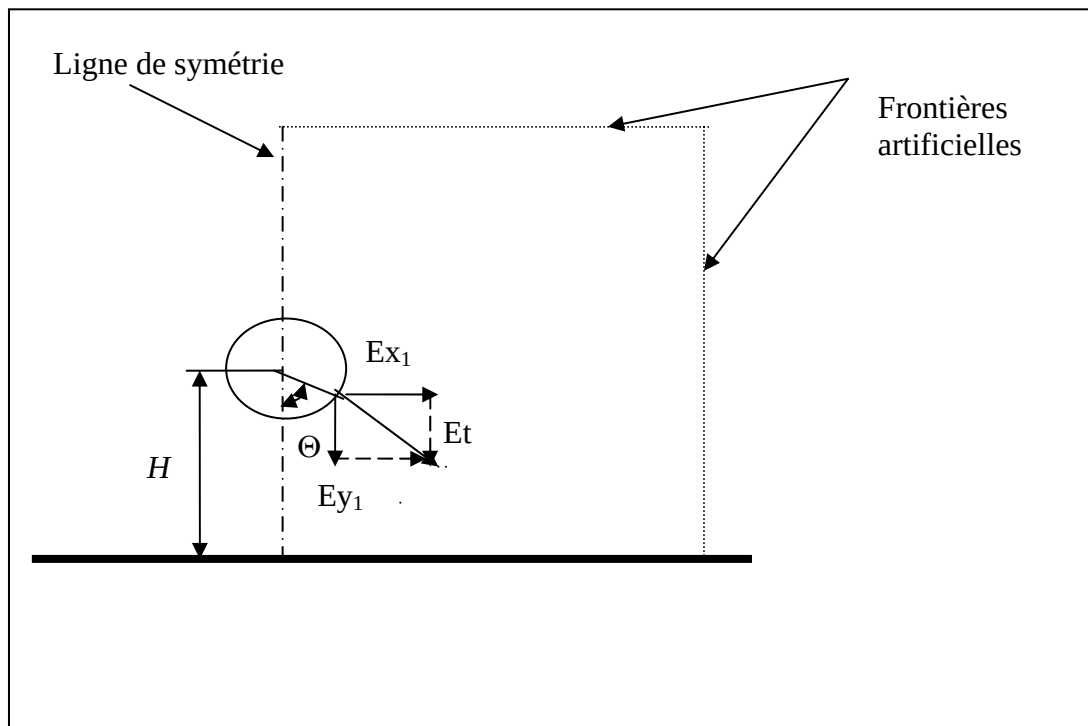


Figure IV-2 Configuration fil-plan avec les frontières artificielles

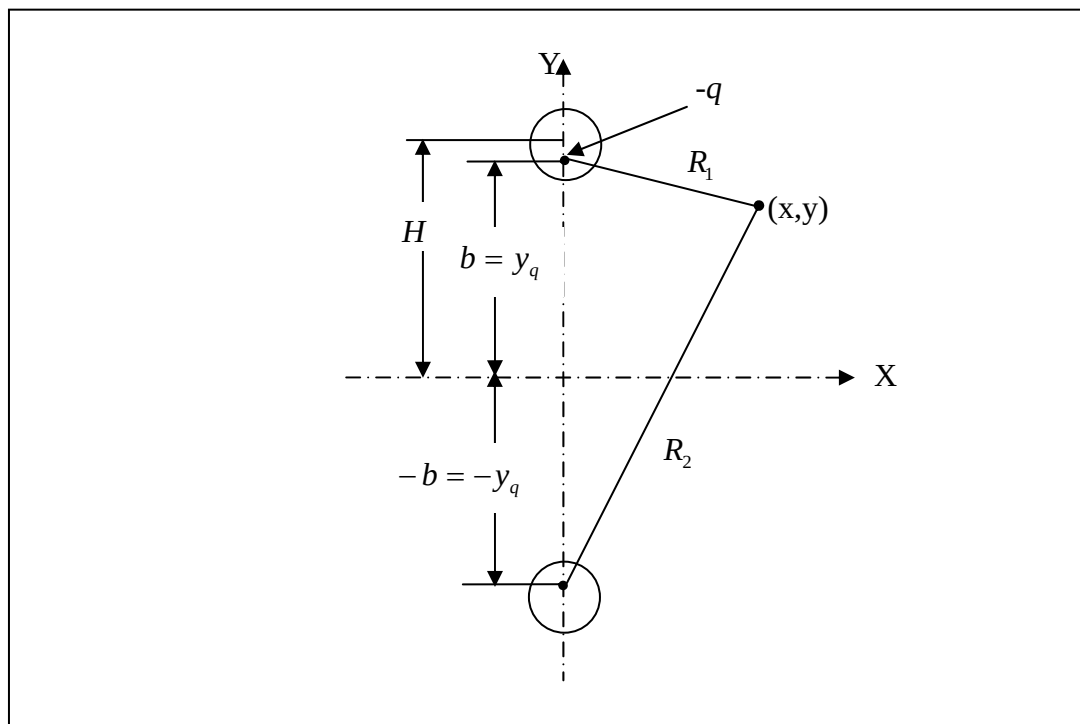


Figure IV-3 Représentation des charges simulant la configuration fil-plan

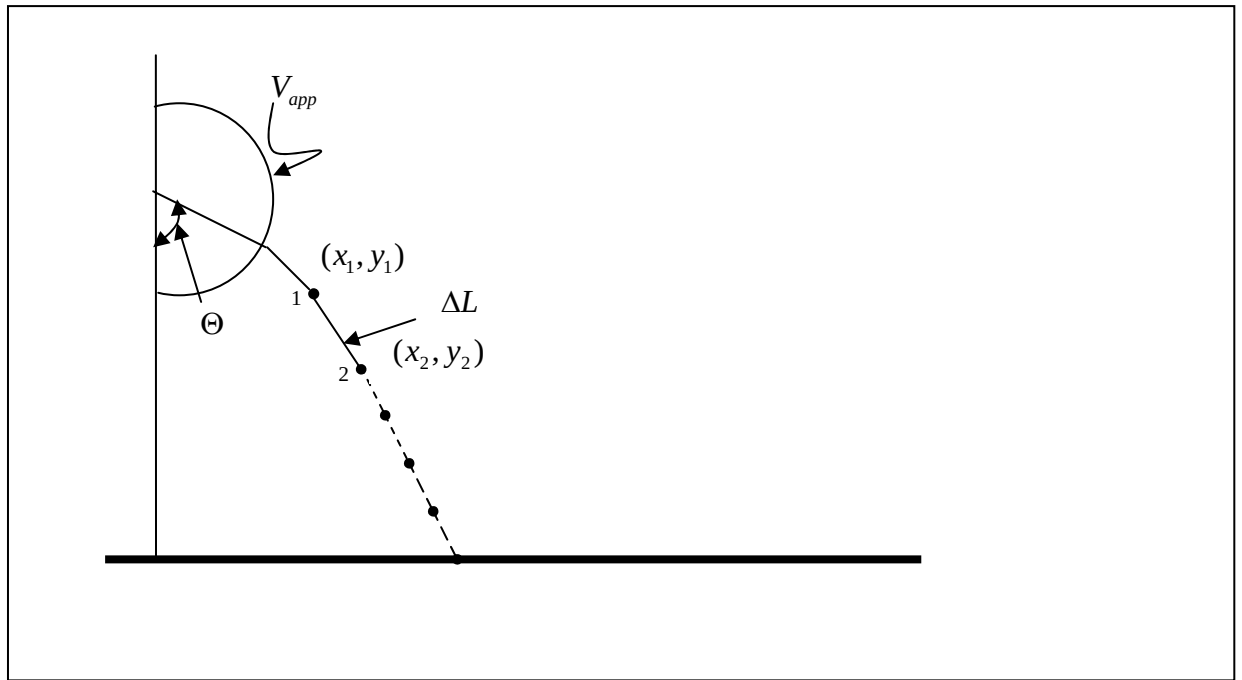


Figure IV-4 *Tracé d'une ligne de champ pour la configuration fil-plan*

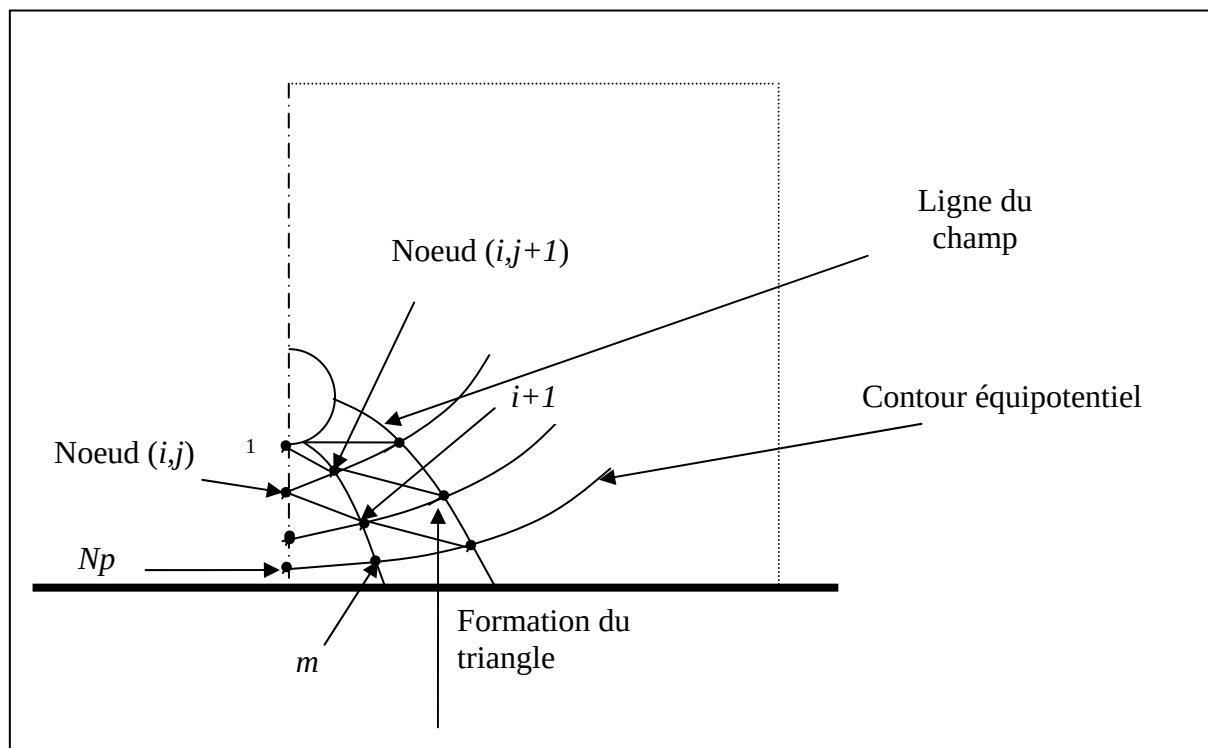


Figure IV-5 Représentation d'une portion de lignes du champ, de contours équipotentiel et des triangles formés.

IV.3.2.2- Méthode des éléments finis (MEF):

❖ Formulation de la MEF:

L'équation différentielle de Poisson est donnée par la relation :

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad (\text{IV-15})$$

Le théorème d'Euler démontre que résoudre cette équation différentielle revient à minimiser la fonctionnelle d'énergie W qui s'écrit [25]:

$$W = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \right\} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right] dx.dy \quad (\text{IV-16})$$

L'intégrale est étendue à l'ensemble du domaine de calcul, que l'on subdivise en petits éléments par maillage triangulaire où chaque triangle est repéré par ses trois sommets. Pour notre géométrie, les éléments triangulaires linéaires sont générés par la division en deux des quadrilatères obtenus par l'intersection des lignes de champ et des contours équipotentiels (figure IV-5).

Dans chaque élément (e), le potentiel est approché par un polynôme du premier ordre en x et y sous la forme :

$$V(x, y) = V(e) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (\text{IV-17})$$

Cette subdivision triangulaire du premier ordre a l'avantage de s'adapter à toute configuration géométrique. Les trois coefficients α_1 , α_2 et α_3 peuvent être calculés à l'aide des potentiels inconnus a priori respectivement aux nœuds i, j et m donnés par les équations [19] :

$$V_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \quad (\text{IV-18})$$

$$V_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \quad (\text{IV-19})$$

$$V_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \quad (\text{IV-20})$$

Les coefficients peuvent être calculés en appliquant la loi de Cramer, le résultat est le suivant:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta_e} (a_i V_i + a_j V_j + a_m V_m) \quad (\text{IV-21})$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\Delta_e} (b_i V_i + b_j V_j + b_m V_m) \quad (\text{IV-22})$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\Delta_e} (c_i V_i + c_j V_j + c_m V_m) \quad (\text{IV-23})$$

avec :

$$\begin{cases} a_i = x_j y_m - x_m y_j \\ a_j = x_m y_i - x_i y_m \\ a_m = x_i y_j - x_j y_i \end{cases} \quad \begin{cases} b_i = y_j - y_m \\ b_j = y_m - y_i \\ b_{im} = y_i - y_j \end{cases} \quad \begin{cases} c_i = x_m - x_j \\ c_j = x_i - x_m \\ c_m = x_j - x_i \end{cases} \quad (IV-24)$$

et

$$2\Delta_e = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = a_i + a_j + a_m = b_i c_j - b_j c_i \quad (IV-25)$$

Dans l'équation (IV-25), le symbole Δ_e désigne l'aire de l'élément triangulaire (e).

Le potentiel en tout point d'un élément (e) est parfaitement défini par les valeurs des potentiels en ses trois sommets, il s'exprime par la relation :

$$V(e) = N_i V_i + N_j V_j + N_m V_m = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \\ V_m \end{bmatrix} \quad (IV-26)$$

N_i , N_j et N_m sont appelées les coordonnées d'aires du fait de leurs propriétés géométriques et sont aussi appelées les fonctions de forme « shape functions ».

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \quad i=i, j, m \quad (IV-27)$$

La minimisation de la fonctionnelle W est réalisée quand les dérivées partielles par rapport à

tous les potentiels des nœuds sont nulles, c'est-à-dire : $\frac{\partial W}{\partial \{V\}} = 0$

$\{V\}$ est le vecteur potentiel pour tous les nœuds du système. L'équation (IV-26) montre que l'on peut restreindre l'intégrale double au domaine formé des n éléments $(e_i)_n$ comportant le sommet i . On en déduit :

$$\frac{\partial W}{\partial V_i} = \sum_n \iint_{(e_i)_n} \left[\left(\frac{\partial V_{(e)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial V_i} \left(\frac{\partial V_{(e)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial V_{(e)}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial V_i} \left(\frac{\partial V_{(e)}}{\partial y} \right) \right) - \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{\partial V_{(e)}}{\partial V_i} \right] dx dy \quad (IV-28)$$

Ce qui devient, compte tenu de (IV-23), (IV-24) et (IV-25) :

$$\frac{\partial W}{\partial V_i} = \sum_n \iint_{(e_i)_n} \left[\left(\frac{b_i}{2\Delta} \sum_j \frac{b_j V_j}{2\Delta} + \frac{c_i}{2\Delta} \sum_j \frac{c_j V_j}{2\Delta} \right) - \frac{\rho}{\epsilon_0} N_i \right] dx dy \quad (IV-29)$$

On aboutit à un système linéaire de forme matricielle :

$$K.V - F = 0 \quad (IV-30)$$

Avec : K : Matrice de raideur ;

V : Matrice des potentiels aux nœuds ;

F : Second membre du système.

Le terme K_{ij} se calcule par intégration sur les triangles comportant les nœuds i et j , soit :

$$K_{ij} = \sum_n \iint_{(e_i)_n} \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4\Delta^2} dx dy = \sum_n \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4\Delta} \quad (\text{IV-31})$$

Tandis que le second membre F_i est déterminé par :

$$F_i = \sum_n \iint_{(e_i)_n} \frac{\rho}{\epsilon_0} N_i dx dy = \sum_n \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{\Delta}{3} \quad (\text{IV-32})$$

La matrice K comporte un fort pourcentage de termes nuls, car K_{ij} n'est calculé que si le nœud i est relié au nœud j .

IV3.2.2.1- Conditions aux limites:

On distingue essentiellement deux types de conditions aux limites :

- Les conditions de Dirichlet, où V est constant sur trois limites à savoir, la surface du conducteur portée au potentiel appliqué, le plan porté au potentiel nul et les frontières artificielles portées aux potentiels obtenus lors du tracé du premier maillage électrostatique. Comme V est connu, les équations correspondants à ces nœuds doivent être éliminées et les seconds membres modifiés en conséquence pour les nœuds qui leurs sont reliés.
- Les conditions de Neumann apparaissent sur l'axe de symétrie. Elles sont implicitement réalisées par la fonctionnelle.

Une fois K et F construites, les potentiels inconnus sont obtenus en multipliant l'inverse de K par F . Dans le cas de l'équation de Laplace la même procédure est à suivre en prenant dans ce cas $\rho = 0$.

IV.3.3- Etape 3: Résolution de l'équation de Poisson:

Cette étape constitue l'étape de résolution de l'équation de Poisson par la MEF dont la procédure d'exécution est donnée ci-dessus. Cependant, nous avons introduit une troisième condition aux limites du potentiel correspondant au champ critique du minimum d'ionisation (voir chapitre I équations (IV-24)-(IV-26)) dans la formulation en éléments finis. Cette condition est insérée sur la frontière distante de L_C par rapport à la surface du conducteur.

Résoudre l'équation de Poisson prétend la connaissance de la densité de la charge d'espace qui, malheureusement n'est pas connue au préalable et son estimation sur la frontière L_C est donnée par [26] :

$$\rho_{R_C,1} = \rho_e \cos(\Theta_i / 2) \quad i=2, 3, \dots, n \quad (\text{IV-33})$$

Avec ρ_e est la valeur de $\rho_{i,1}$ à $\Theta_i = 0$ et $R_C = L_C + R_0$.

L'estimation de la charge d'espace pour les autres nœuds du maillage est obtenue en utilisant la méthode simplifiée des caractéristiques vérifiant l'équation de continuité du courant, dans laquelle les lignes caractéristiques représentant l'évolution spatiale de la charge d'espace sont celles du champ électrique.

IV.3.3.1- Méthode simplifiée des caractéristiques:

Considérons le cas de la polarité positive. A partir des équations (IV-2) et (IV-3) et (IV-1) et en considérant la mobilité des ions constante, nous aurons :

$$\nabla \cdot (\mu \cdot \rho \cdot E) = 0 \Rightarrow \nabla(\mu \cdot \rho) \cdot E + \rho \cdot \mu \cdot \nabla \cdot E = 0 \Rightarrow E \nabla \rho + \rho \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad (\text{IV-34})$$

$$(\text{IV-33}) \Rightarrow \nabla \rho = -\frac{\rho^2}{\varepsilon_0 \cdot E} \quad (\text{IV-35})$$

Le long des lignes de champ, l'équation (IV-35) peut s'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{\rho^2}{\varepsilon_0 \cdot E} = f(\rho) \quad (\text{IV-36})$$

Les valeurs du champ E sont initialement prises égales à celles obtenues dans l'étape 2. Pour la résolution de l'équation (IV-33), nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre. Un organigramme simple permet d'effectuer les calculs :

- Donner ρ_e .
- Calculer h .
- $i=1$ à $(n-1)$; $j=1$ à m ; calculer:

$$K_1(i, j) = h(i, j) \cdot f(i, j)$$

$$K_2(i, j) = h(i, j) \cdot f\left(i + \frac{h}{2}, j + \frac{K_1(i, j)}{2}\right)$$

$$K_3(i, j) = h(i, j) \cdot f\left(i + \frac{h}{2}, j + \frac{K_2(i, j)}{2}\right)$$

$$K_4(i, j) = h(i, j) \cdot f\left(i + \frac{h}{2}, j + K_3\right)$$

$$\rho(i+1, j) = \rho(i, j) + \frac{1}{6} [K_1(i, j) + 2.K_2(i, j) + 2.K_3(i, j) + K_4(i, j)]$$

- Fin.

h est la distance entre le nœud considéré et le nœud précédent suivant la ligne du champ .

Ayant estimé toutes les charges aux nœuds du maillage, la résolution de l'équation de Poisson par la MEF devient aisée de même que l'estimation des valeurs du champ électrique par la méthode d'interpolation / extrapolation. Ces dernières seront utilisées pour réestimer la densité de la charge d'espace aux nœuds. Cette procédure se poursuit jusqu'à ce que l'erreur sur le potentiel (E_{rr}) devienne inférieure à une valeur prédéterminée prise égale à $\delta_1 = 10^{-3}$.

L'erreur est définie telle que :

$$E_{rr} = \frac{|V^{(l)} - V^{(l+1)}|}{V_{av}}, \quad \text{avec : } V_{av} = \frac{(V^{(l)} + V^{(l+1)})}{2},$$

où l est le numéro de l'itération.

En polarité négative, l'équation (IV-35) sera accompagnée d'un signe (-) et l'estimation de la densité de la charge d'espace est effectuée sur le plan et les frontières artificielles, ce qui n'est pas facile, encore, on favorise la programmation en polarité positive puis le résultat sera précédé d'un signe moins.

Une fois que la convergence du potentiel est acquise, nous déterminerons les charges discrètes localisées aux centres des éléments triangulaires. Ces dernières sont calculées à partir des valeurs de la densité de la charge d'espace aux nœuds du maillage et sont déterminées par les équations suivantes :

$$q(i) = \rho(i)_{moy} \cdot \Delta_e(i), \quad (IV-37)$$

avec : $\rho(i)_{moy} = (\rho_{(1)} + \rho_{(2)} + \rho_{(3)})/3,$

Où : $\rho_{(1)}, \rho_{(2)}, \rho_{(3)}$ sont les valeurs de la densité de la charge d'espace aux nœuds du triangle (i) et $\Delta_e(i)$ est la surface de triangle.

IV.3.4 - Etape 4 : Reconstitution du maillage:

Les charges discrètes estimées dans l'étape 3 modifient considérablement le champ électrostatique Laplacien et déforment les lignes de champ. En effet, le champ électrostatique en tout point du maillage est la superposition des champs créés par toutes les charges y compris celle simulant le système des électrodes. En fait cette dernière sera modifiée pour garder la même tension appliquée sur l'électrode active, elle est obtenue en utilisant la méthode de superposition. Le potentiel à la surface de l'électrode active est donné sous la forme matricielle suivante :

$$V_{app} = V_1 + V_2 + V_3, \quad (IV-38)$$

où : V_1 le potentiel créé par la charge d'espace discrète et son image sur l'axe (OXY);

V_2 le potentiel créé par la charge d'espace discrète et son image sur l'axe (O(-X)Y);

V_3 le potentiel créé par la charge simulant l'électrode active et son image.

Si, m est le nombre de charges d'espace discrètes et n le nombre de points sélectionnés sur le fil correspondants au nombre de lignes du champ, alors :

$$V_1 = \sum_{j=1}^m p_{ij} q_j \quad V_2 = \sum_{j=1}^m p'_{ij} \cdot q_j \quad V_3 = p_{i,1} q_y \quad i=1, \dots, n \quad (IV-39)$$

Les coefficients p_{ij} valent : $p_{ij} = \frac{1}{2\pi \cdot \epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$. D'où R_1 et R_2 ont été déterminés dans

l'étape 1 et sont fonction des positions des charges. Les positions des charges discrètes ont été déterminées dans l'étape 3, et pour la position de la charge sur le fil (xq , yq), nous avons trouvé que : $xq = 0, yq = \sqrt{H^2 - k \cdot R_0^2}$, avec k un facteur à ajuster. La charge q_y est prise égale à la moyenne du rapport $(V_{app} - V_1 - V_2) / p_{i1}$.

Ayant déterminé la charge q_y , des calculs similaires à ceux de l'étape 1 en incluant le principe de superposition sont effectués. En commençant par recalculer le potentiel à la surface du fil, le facteur k est ajusté jusqu'à avoir la valeur du potentiel appliqué. Une fois cette condition satisfaite, la même procédure se poursuit jusqu'à l'obtention des nouvelles matrices du potentiel et du champ électrique. A ce stade les étapes (1-4) sont répétées, la densité de la charge d'espace sur la frontière L_C est prise égale aux valeurs obtenues à la fin du premier maillage, on est donc en présence du second maillage. Un troisième maillage, ou plus, sont effectués en répétant les mêmes procédures du second, jusqu'à ce qu'il prend une structure stationnaire.

IV.4-Résultats et interprétations:

IV.4.1- Les lignes de champ :

Avant de parler de la distribution du champ électrique, il convient de définir les caractères particuliers de l'état des lignes du champ. Une ligne de champ est une ligne orientée selon les vecteurs champs. Ainsi, le vecteur champ est tangent aux lignes de champ. Nous remarquons que :

- Le champ est de moins en moins intense lorsque l'on s'éloigne de la source (la particule chargée).
- Si $q < 0$: alors les vecteurs champs sont orientés vers la charge créatrice q . Les lignes de champs s'orientent vers la charge.
- Si $q > 0$: les vecteurs champs « fuient » la charge créatrice q les lignes de champ fuient la charge.

Les figures (IV-6) et (IV-7), montre les variations des lignes du champ dans notre configuration. En générale, les valeurs calculées sont en bon accord avec celles données par les modèles semi- analytique.

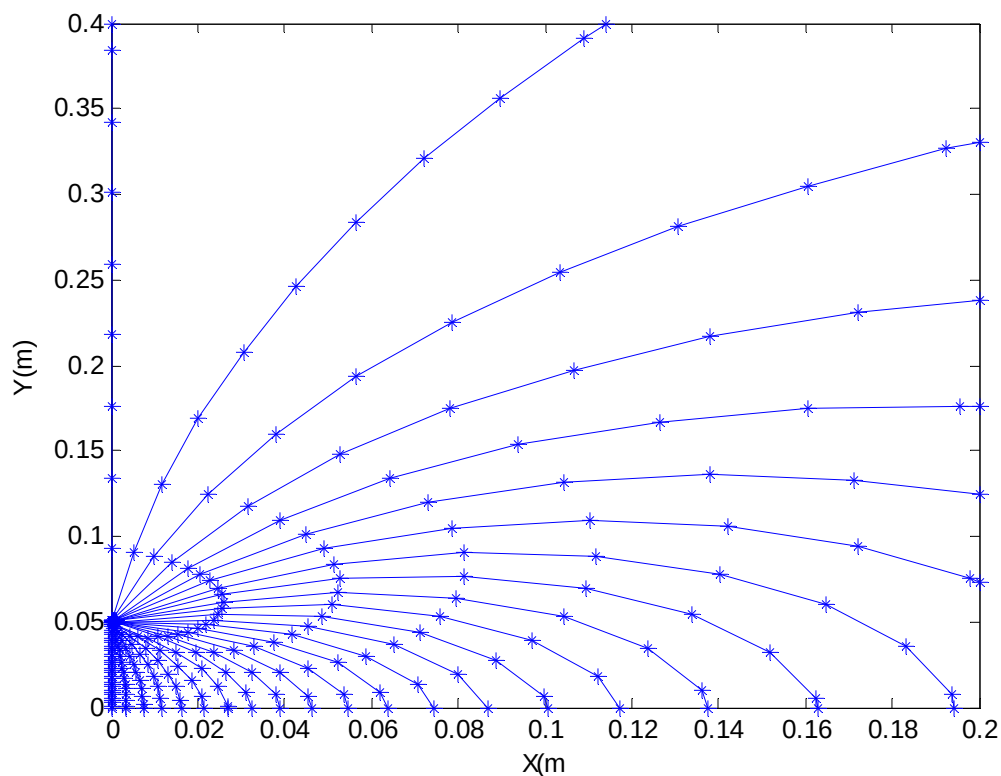


Figure IV.6 : Les lignes de champ pour le domaine de calcul.

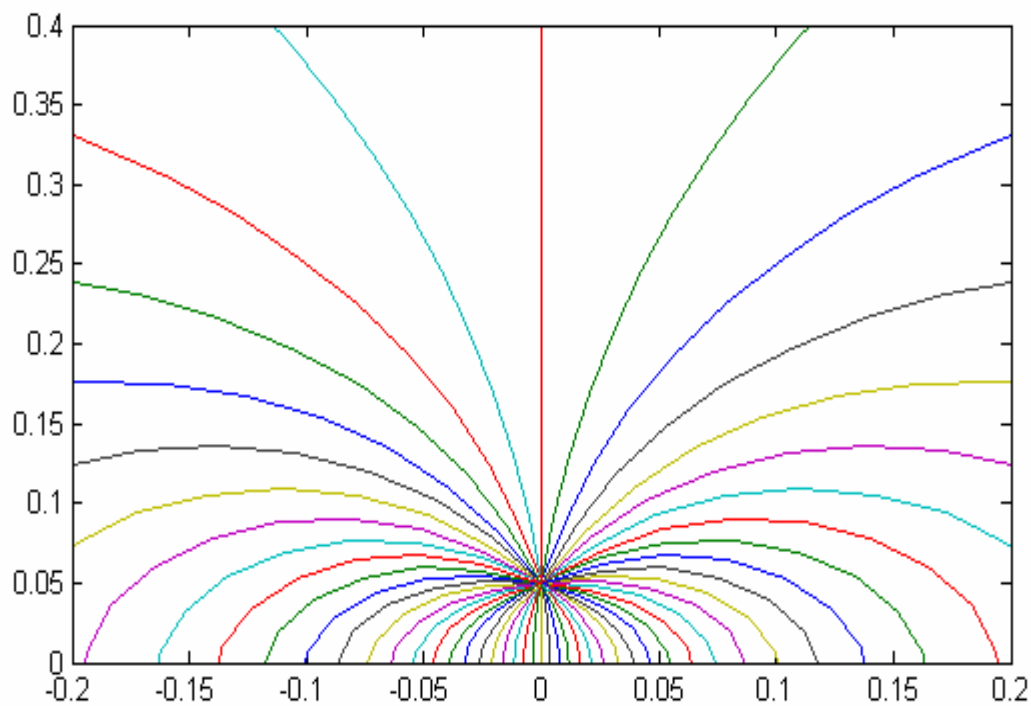


Figure IV.7 : Les lignes de champ pour tout le système.

IV.4.2- Le maillage:

Le maillage représenté sur les figures (IV-8) et (IV-9) est le maillage orthogonal que nous avons choisi pour discrétiser notre domaine de calcul. Pour réaliser ce maillage, nous avons tracé lignes de champ et contours équipotentiels. On peut constater que les équipotentiels sont en tout point perpendiculaires aux lignes de champ. Les éléments triangulaires sont obtenus en divisant en deux les quadri-angles ainsi formés. Le nœud (i,j) est donnée par l'instruction de la lignes avec le contour. Le maillage est suffisamment fine au voisinage du fil à cause de la forte variation du gradient du champ électrique.

La méthode a été appliquée aux différentes configurations du plan conducteur. Un échantillon de la grille des éléments finis pour la configuration étudiée est montré dans la figure (IV-8). Le nombre des contours équipotentiels égal à 40 et le nombre de lignes du champ égal à 26.

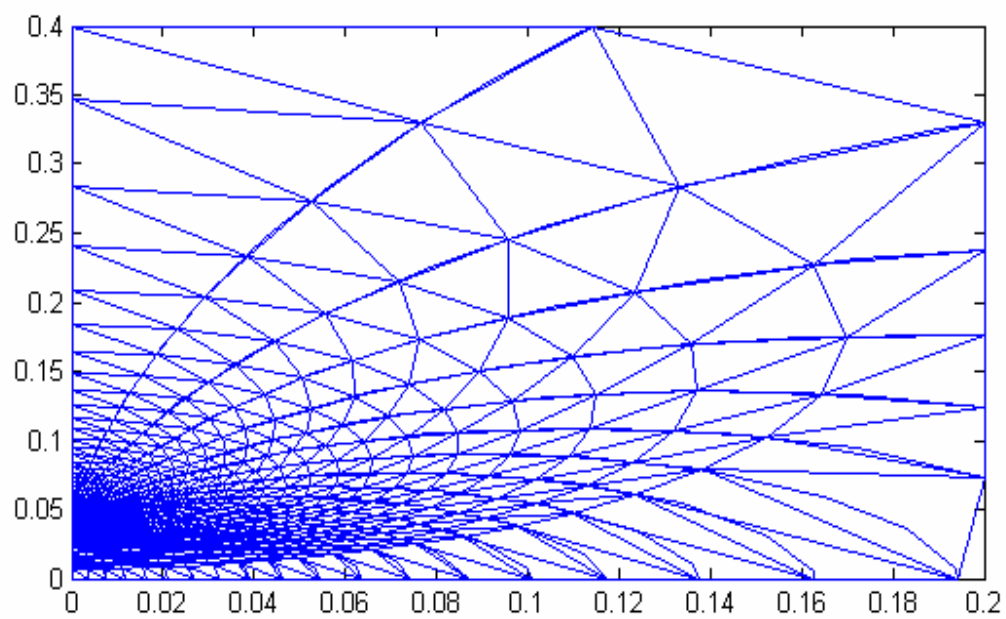


Figure IV.8 : discrétisation du domaine de calcul en éléments finis.

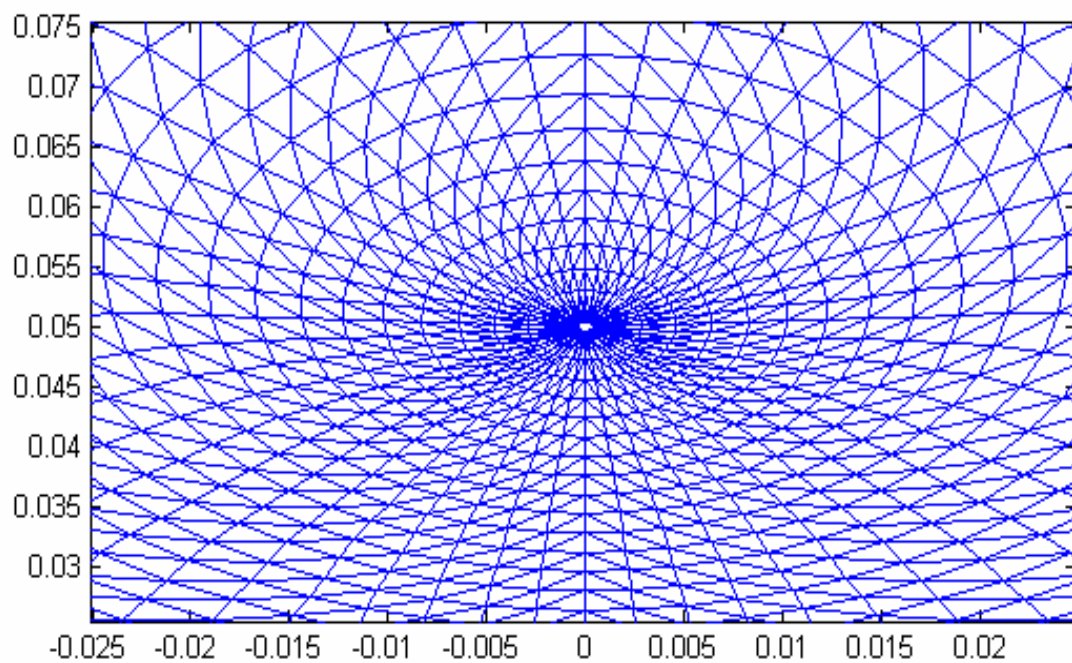


Figure IV.9 : Variation de l'aire des éléments triangulaires en fonction de la distance par rapport à l'électrode active.

IV.4.3- Le potentiel:

Les variations de potentiel électrique entre les deux électrodes du système de configuration fil- plan sont représentées dans les figures (IV-10), (IV-11) et (IV-12). Au voisinage du conducteur actif, le potentiel est égal à la tension appliquée. Sur le plan collecteur, il est égal à zéros (condition aux limites).

Nous constatons que plus la distance augmente plus le potentiel diminue, donc il est inversement proportionnelle au déplacement suivant les lignes du champ.

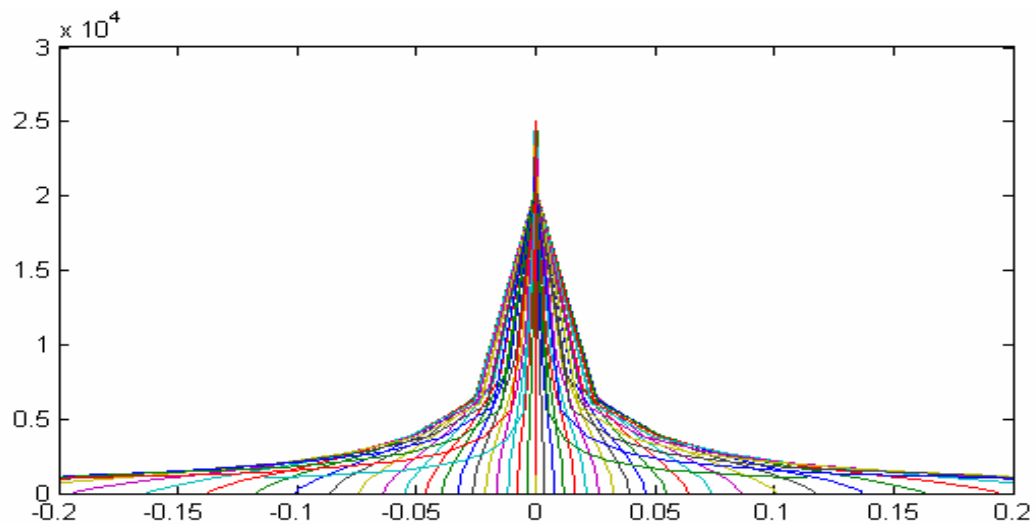


Figure IV.10 : Variation du potentiel au plan

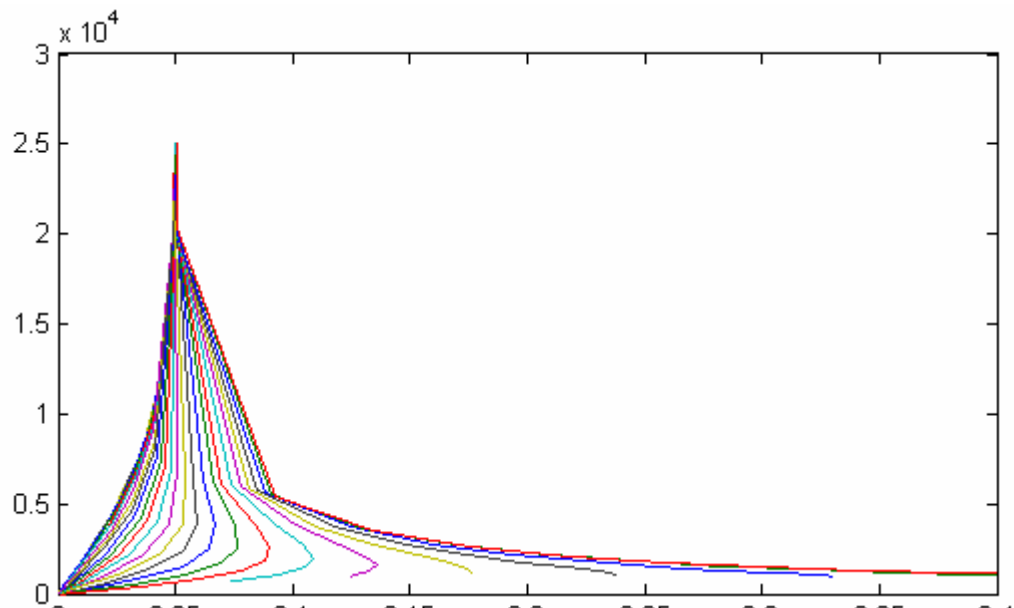


Figure IV.11 : Variation du potentiel entre le fil et le plan collecteur.

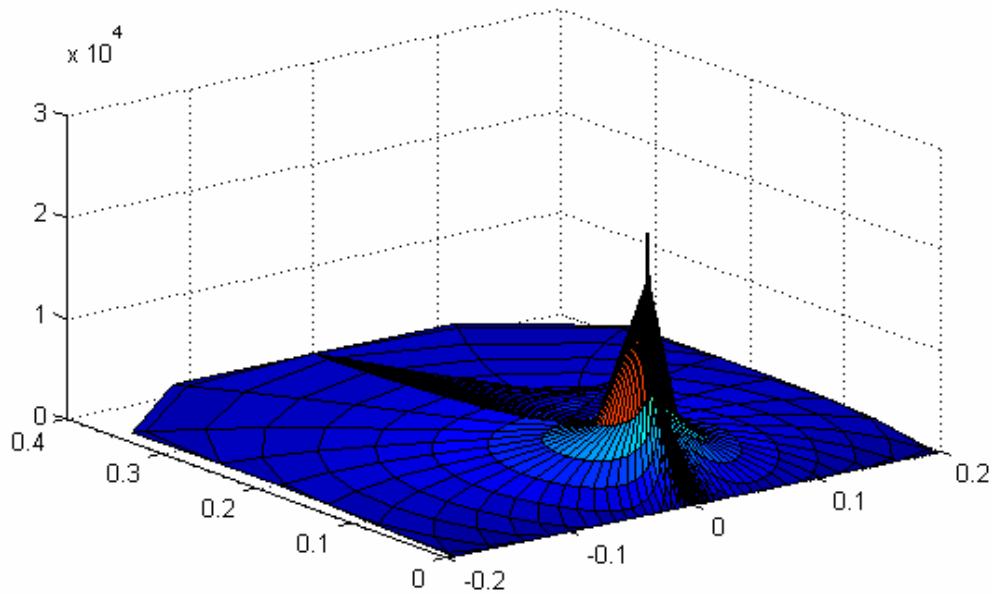


Figure IV.12 : Distribution spatiale du potentiel entre les deux électrodes de la configuration.

IV.4.4- Le champ électrique:

Les figures (IV-13), (IV-14) montrent que le champ électrique est de moins en moins intense lorsque l'on s'éloigne du conducteur.

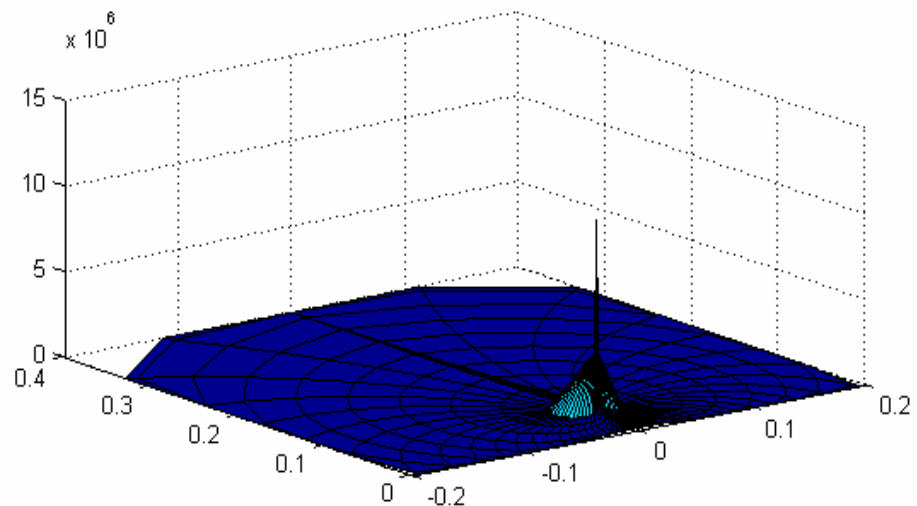


Figure IV.13 : Distribution spatiale du champ électrique.

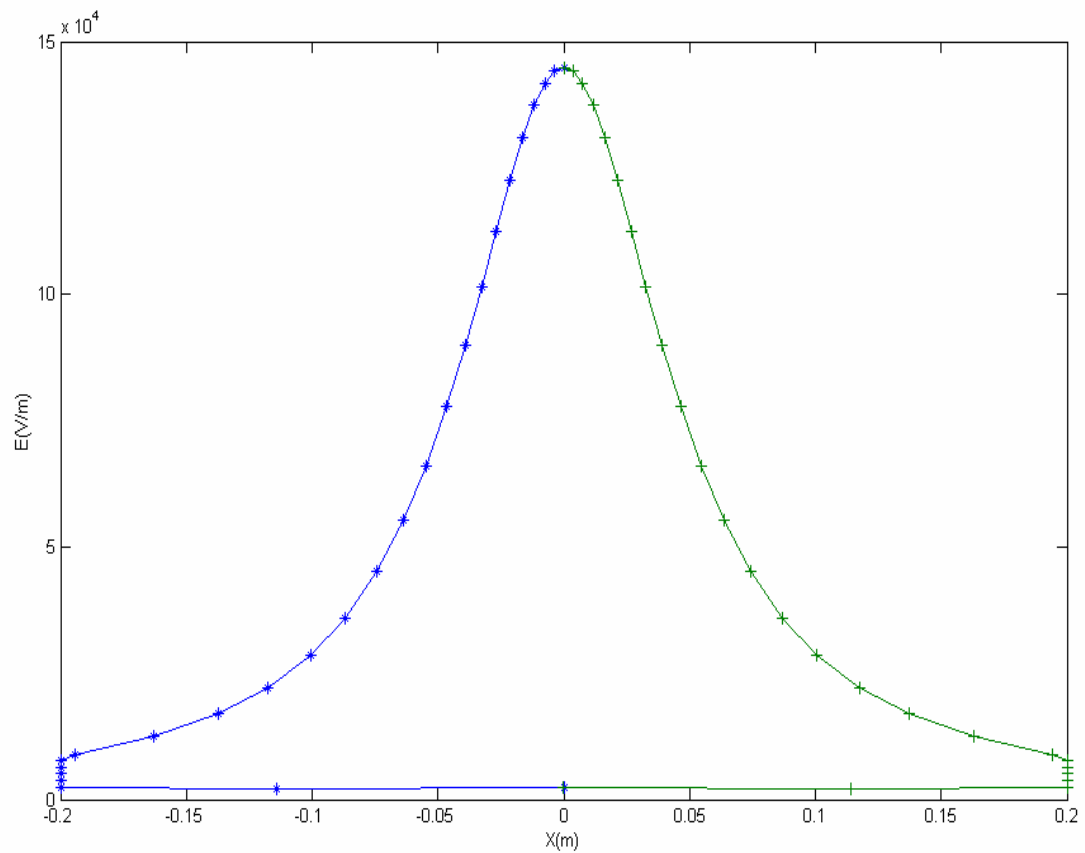


Figure IV.14 : Variation du champ électrique par rapport à l'axe du plan.

Les résultats de calcul du champ en fonction de la tension appliquée sont représentés sur la figure (IV-15). Le champ électrique varie linéairement avec la tension appliquée, ce résultat est identique à ceux obtenus par d'autres auteurs dans leurs différents modèles. On peut dire que plus la tension appliquée augmente, plus le champ électrique augmente.

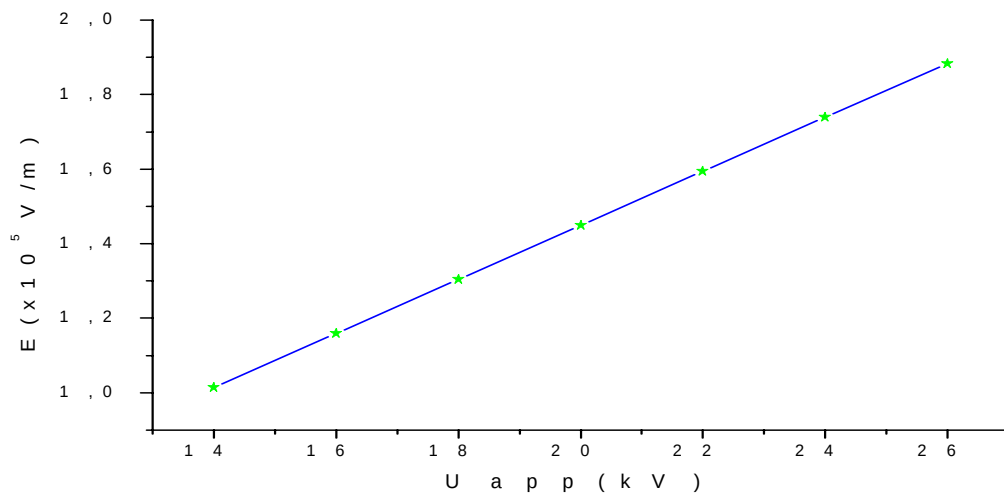


Figure IV.15 : Variation du champ électrique au plan en fonction de la tension appliquée

Nous remarquons dans la figure (IV-16) que le champ électrique prend des grands valeurs lorsque la tension appliquée est grande, mais ces valeurs du champ sont diminuées quand la distance du plan est augmentée. Alors, le champ électrique dépend de la tension appliquée et la distance inter électrode (l'air dans notre cas) et aussi dépend de la constitution de conducteur lui-même.

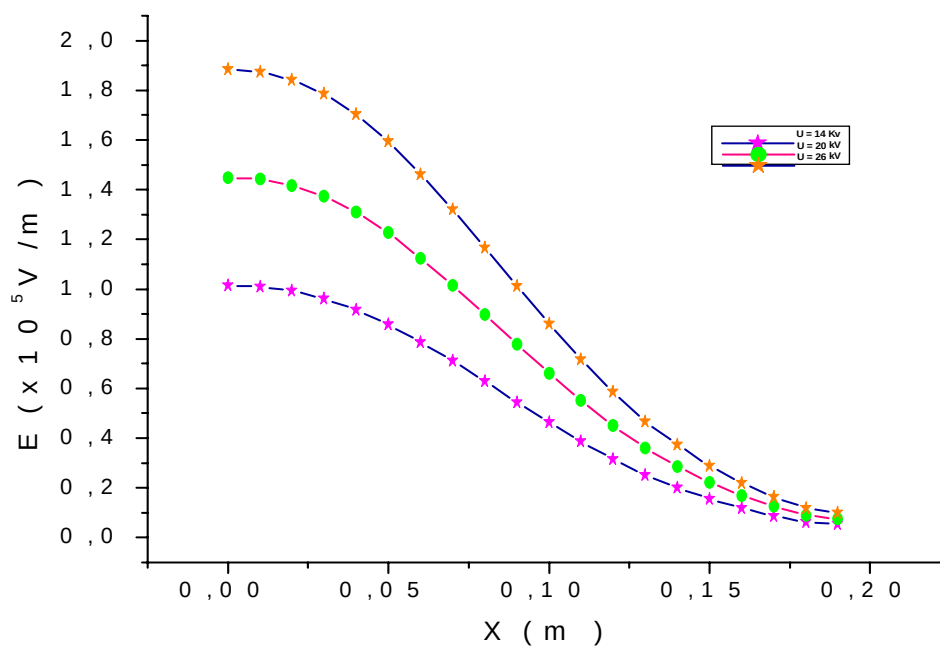


Figure IV.16 : Variation du champ électrique au plan en fonction de la tension appliquée et en fonction de la distance du plan.

IV.4.5-La densité de charge :

La figure (IV-17) montre l'influence de la distance inter électrode sur la densité de charge simulée au voisinage de l'électrode active. Le développement de la charge débute lorsque la tension appliquée dépasse la tension seuil d'apparition de la décharge couronne.

Nous remarquons que la densité de charge est proportionnelle inversement avec les valeurs de la distance Y (m), mais elle prend une valeur maximale sur la frontière de la zone d'ionisation avec la zone de dérive.

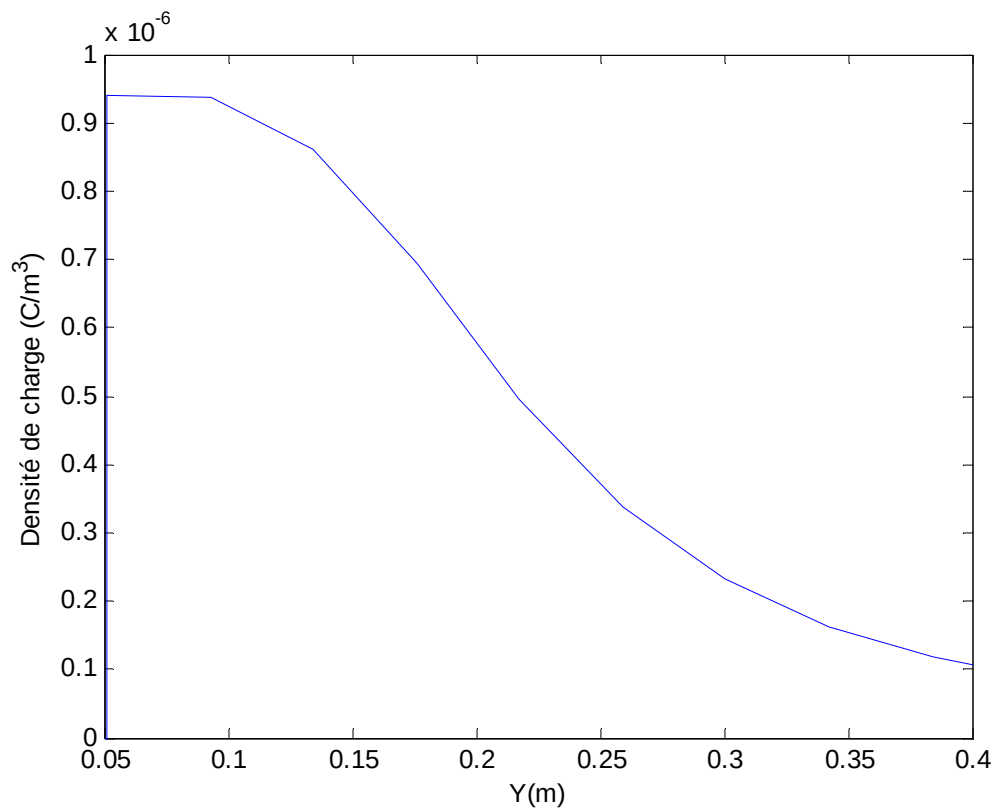


Figure IV.17 : Distribution de la densité de charge suivant les lignes de champ.

IV.4.6- La densité de courant :

La densité de courant représenté sur la figure (IV-18) montre une forte valeur au voisinage du fil, qui diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne. Nous remarquons que la densité de courant est nulle dans la zone d'ionisation. La densité de courant prend une valeur maximale sur la frontière, et commence à diminuer en augmentant le pas de discrétisation.

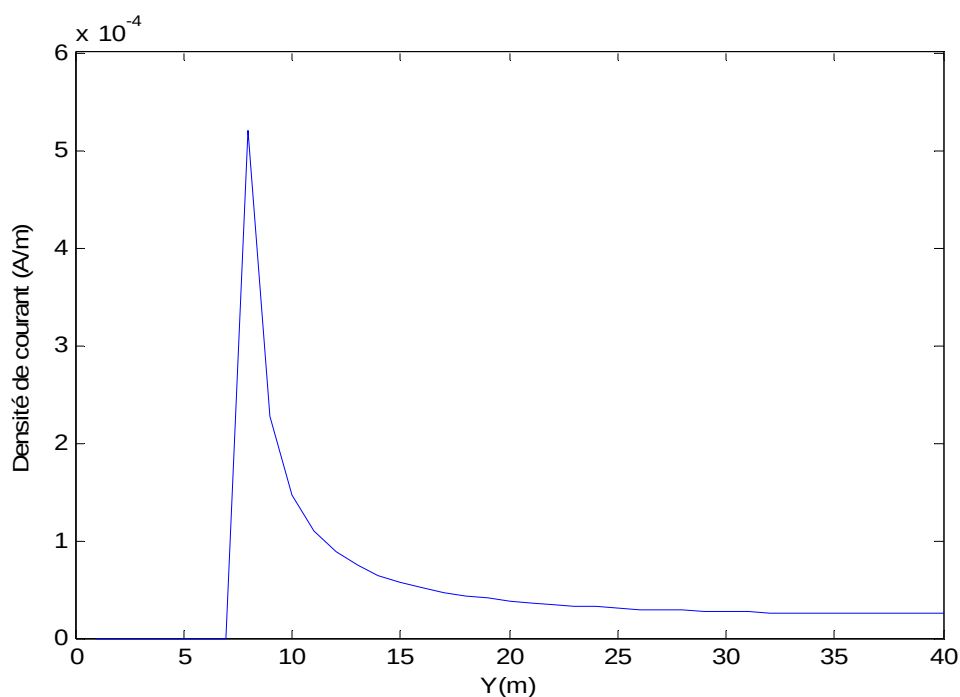


Figure IV.18 : Variation de la densité de courant entre les deux électrodes.

IV.4.7- le courant de décharge :

La figure IV .19 montre que les variations du rapport I_s/I_{s0} en fonction de V_b sont linéaires et en bon accord avec le modèle de Tassicker décrit au chapitre II.

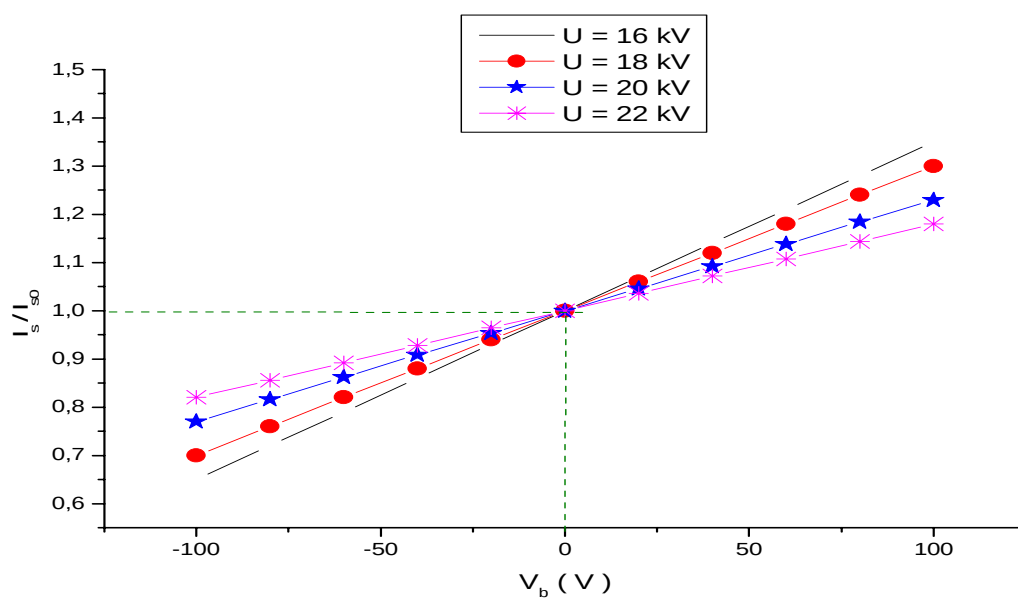


Figure IV.19 : Variation du rapport 'Is/Iso' en fonction de la tension de polarisation 'Vb'

Les caractéristiques $\frac{I_s}{I_{s0}} = f(V_b)$ sont relevées pour une tension U appliquée constante comprise entre la tension de seuil et la tension de claquage ($V_s < U < V_B$).

IV.5- Conclusion :

La présente dissertation avait pour but de montrer que les formulations élément finis offrent un cadre d'approximation numérique appropriée à la simulation des problèmes dynamique, particulièrement si l'on est intéressé par des simulation à différentes paramètres. La méthode est basée principalement sur le modèle physique –mathématique de Hartman du champ seuil de l'effet couronne. Le modèle numérique que nous avons développé a été élaboré dans le but de calculer les variations des paramètres électriques de l'effet couronne dans l'espace inter-électrode. Le principe de calcul est la résolution itérative et simultanée des équations de Poisson et de continuité de courant. L'intensité du courant électrique est le débit de charge passant par un point donné ou à travers une surface donnée.

Quand la charge est dans un gaz, elle entre en collision à plusieurs reprises avec des particules du milieu, ce qui provoque des changements aléatoires de direction. Mais, si les composantes aléatoires de la vitesse s'annulent et il ne reste qu'une vitesse moyenne constante, appelée vitesse d'entraînement $\mu E = \mathcal{G}_e$, dans la direction de E .

Un ensemble de particules chargées correspondant à une densité de charge ρ dans un volume $\mathcal{G}_\Omega$ animé d'une vitesse $\mathcal{G}_0$.

Le concept de densité de courant créé par un nuage de particules chargées en mouvement est quelque fois utile pour étudier la théorie du champ électromagnétique.

Les résultats obtenus par le modèle numérique sont très satisfaisants et sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux et analytiques.

Conclusion

06

$$\nabla^2 V = \mp \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{J} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{E}$$



Regarde autour de toi et observe.

*Tout ce qui existe en ce monde
n'a-t-il pas été créé en pensée?*

*Il aura fallu que quelqu'un, quelque part,
à un moment donné, visualise une idée*

qui, à force de travail, est ensuite devenue une réalité.

Conclusion générale

Le but de notre travail était de développer un code numérique pour déterminer la distribution du champ électrique et la densité de courant pour l'effet couronne dans l'air. Nous avons fait l'étude pour une configuration 2D pour simplifier le travail et pour mettre au point la technique de redéfinition du maillage structuré. Nous avons essayé plusieurs techniques numériques pour résoudre les équations de Maxwell. Les deux équations couplées, l'équation de continuité de courant et l'équation de Poisson ont été résolues par approximations successives.

Le point le plus important et le plus original dans notre travail est la redéfinition du maillage à chaque itération du calcul. Les nœuds de ce maillage sont les points d'intersection entre les lignes de champ et les équipotentielles.

Ce maillage structuré présente le grand avantage d'améliorer la détermination de la distribution du champ électrique et de la densité de charge entre les deux électrodes ainsi que celle de la densité de courant sur le plan collecteur. Nous avons calculé le potentiel électrique aux nœuds du maillage par la méthode des éléments finis, les éléments finis utilisés sont des triangles linéaires.

Deux méthodes numériques ont été examinées pour déterminer la densité de charge ρ aux nœuds du maillage structurée : la méthode des caractéristiques et la méthode de Runge- Kutta d'ordre quatre pour la zone de dérive. Dans la zone d'ionisation, elle est posée tout simplement égale à zéro. L'estimé initial ρ_0 est choisi sur la frontière des deux zone constituant l'espace formé par les deux électrodes de notre configuration. Cet estimé est ajusté au fur et à mesure que le champ électrique calculé sur la frontière se rapproche de la valeur de E_c .

Nous constatons que plus le nombre des itérations est grand, plus les résultats sont bien précises, alors un ou plusieurs maillage sont effectués avec les mêmes étapes permet de donner des bons résultats avec une minimisation acceptable de l'erreur e_{rr} .

Notre étude théorique et numérique de l'effet couronne permet de formuler les conclusions suivantes :

- L'intensité de courant de décharge augmente avec la croissance de la tension appliquée et de la température ambiante, à condition que la distance séparant les électrodes soit constante. L'augmentation de cette distance entraîne la diminution de l'intensité du courant.

Conclusion générale

- La théorie de Townsend est basée sur la multiplication des électrons avec ou sans champ électrique appliqué, cette théorie nous dirige vers l'avalanche électrique.
- Le non validité de la théorie de Townsend aux pressions élevées conduit à la recherche d'une autre théorie améliorée, celle de la formation du Streamer.
- Notre travail vérifié la loi de Peek qui concerne la relation entre le champ électrique et la tension appliquée et aussi la distance inter électrode.

Quand nous parlons sur les différentes méthodes de mesures du champ électrique et les dispositifs essentiels utilisés, nous avons trouvé que la sonde polarisée prend une grande importance dans notre étude. Les valeurs obtenues par la sonde confirment l'importance de cet appareil.

Nous avons présenté la structure et les méthodes numériques employées pour la simulation des différents paramètres de la décharge couronne. La méthode des éléments finis s'est avérée être un bon choix parmi les différentes méthodes numériques proposées. Cette méthode qui permet de se contenter d'une description surfacique des objets modélisés. Présente les avantages importants par rapport aux différentes méthodes existantes du point du nombre d'inconnues mis en jeu, de la prise en compte des domaines infinis, des configurations bidimensionnelles et de la description d'une surface conductrice de faible épaisseur.

Ainsi, malgré la complexité des modèles mathématiques étudier et la limitation du nombre d'éléments pouvant être utilisé, la comparaison des résultats numériques obtenus par le biais du logiciel Matlab, avec les résultats numériques et expérimentaux trouvés dans les différents laboratoires de recherche internationaux, a démontrée une très bonne concordance. Ce la ainsi permis de valider notre modèle.

Les perspectives de ce travail sont multiples. Nous avons choisi pour se mémoire d'en présenter quelques unes, actuellement à l'étude. Il s'agit en premier de continuer le développement du modèle en le généralisant aux d'autres configurations géométriques. Une autre voie envisageable, de prévoir une extension de l'outil à la configuration entièrement tridimensionnelle. Il est donc souhaitable d'effectuer une expertise dans laquelle l'influence de ces différents phénomènes serait prise en compte.

Bibliographie

- [1] Claude Gary, Effet couronne sur les réseaux électriques aériens, Techniques de l'Ingénieur d4440, PDF. Juin 2005.
- [2] Yali, B., SC.A. . " Contribution à l'étude de l'influence des décharges de couronne sur la perte de volume d'une aspérité de glace portée à un potentiel élevé". (mémoire a présenté à l'université du Québec a Chicoutimi. Avril 1993.)
- [3] Claude Gary, M. Moreau, L'effet couronne en tension alternative, Eyrolles, Paris, 1976, p.p. 17 – 31.
- [4] E. Nasser, M. Heiszler, Appl. Phys., Vol. 76, 1949, p. 1501.
- [5] J. M. Townsend, 1994, Electricity in gases, Oxford University press.
- [6] R. C. Fletcher, Phys. Rev. , Vol. 76, 1949, p. 1501.
- [7] R. T. Waters, N. B. Stark, J. Phys., Vol. 45, 1974, p. 3396.
- [8] Tassicker O. J., 1974, Proc. IEE, Vol 121, pp. 213-220.
- [9] Selim E.O., Waters R. T, IEEE Trans1980., Vol. 1A-16m p.
- [10] Selim E.O, Thèse de P.H.D., High voltage breakdown in non- uniform fields new measurements technics and application, UWIST (UK). 1979
- [11] J. M. Meek, Phys. Rev. , Vol. 57, 1949, p.p. 722 - 728.
- [12] R. Ikene, Influence des paramètres physiques de l'air et de la distance intrélectrode sur la charge couronne positive en géométrie fil- plan, Mémoire de magister, 1997, université de Bejeia.
- [13] Spence D.A., Proc. Cambridge Phil. Soc. Vol 68, pp 529-545.

- [14] M. S. Mouhoubi, Mesure du champ électrique avec la sonde polarisée Lors de La décharge couronne en géométrie fil plan, Mémoire de magister, 1996, université de Bejeia.
- [15] Alexandre Ern, Eléments finis (aide mémoire), Dunod, Paris, 2005.
- [16] Maïoufi Atika , Modélisation des phénomènes électromagnétiques non linéaires par la méthode des volumes finis. Mémoire de magister .université de Batna. 20/04/2006.
- [17] Gérard Meunier, Modèles et formulations en électromagnétisme, Hermes sciences, Lavoisier, 2002, p.p. 21- 207.
- [18] G.DHATT, G. TOUZOT, une présentation de la méthode des éléments finis, Maloine S. A. Editeur, 1981, pp 199-271.
- [19] ABDEL- Salem M. Fargually M. , Abdel- Sattar S. , 1983, Finite element solution of monopolar corona equation, IEEE Trans. Electr. Inst 18.
- [19] Al- Hamouz , 1998, Finite element computation of corona around monopolar transmission line, Electr. Power syst. Res. 48.
- [21] A. Kasdi, Y. Zbboudj, H.Yala, calcution and mesurement of électric field under HV.DC transmission lines, Pys. J. Appl. Pyhs 2007.
- [22] N. Oussalah, Y. Zebboudj, Négative corona computation in air, Spniger-vertag London Limited. 2006
- [23] A.M. Benselama. Modélisation numérique du comportement d'une particule sous champ électrique dans les micro systèmes, Thèse de doctorat ,.université Joseph Fourier, 25.11.2005.
- [24] K. Adamiak, Adaptive approach finite element modelling of corona fields, IEEE transactions on industry applications, vol. 30,No.2 ,1994.
- [25] E. Kuffel, W.S. Zaengl, J. Kuffel, High voltage Engineering, Newnes, Oxford, 2000, p.p. 246-252.
- [26] B.Khaddour, Modélisation du champ électrique modifié par la charge d'espace injectée, Thèse de doctorat, I.N.P. de Grenoble, 21.11.2006.