



جامعة المسيلة  
كلية الرياضيات والإعلام الآلي  
MAS / Math 106

# UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

**Spécialité** : Mathématiques

**Option** : Géométrie des espaces de Banach et analyse harmonique

Par

**SOUALMIA Rachid**

Sujet

**Sur les espaces de Schatten**

Soutenu publiquement le 19/06/2014 devant le jury :

TIAIBA Abdelmoumen	M.C.A Univ de M'sila	Président
SAADI Khalil	M.C.A Univ de M'sila	Rapporteur
TALLAB Abdelhamid	M.A.A Univ de M'sila	Examineur
BELAADA Abdelaziz	M.A.B Univ de M'sila	Examineur

**Promotion : 2013 / 2014**

## Résumé

Dans ce mémoire on va étudier les classes de Schatten. Ces classes ont été introduites par R. SCHATTEN et J. VON-NEUMANN [1946 - 1948]. Dans la catégorie des opérateurs linéaires compacts sur un espace de Hilbert, on définit ces dernières classes en utilisant la notion de trace. Ces classes possèdent beaucoup de propriétés intéressantes, notons par exemple leurs relation avec les opérateurs de Hilbert-Schmidt et les espaces  $L_p$  non commutatifs. Puis nous étudions ensuite les idéaux multilinéaires et leurs méthodes de construction.

## ملخص

في هذه المذكرة سوف ندرس أقسام شاتين. هذه الأقسام أدخلت من قبل روبيرت شاتين و جون فون نيومان [1946 - 1948]. في فئة المؤثرات الخطية المتراسة على فضاء هيلبرت، نعرف هذه الأقسام الأخيرة باستخدام مفهوم الأثر. هذه الأقسام تحوي العديد من الخصائص الهامة، على سبيل المثال علاقتها بمؤثرات هيلبرت-سميث والفضاءات  $L_p$  غير التبديلية. ثم نقوم بدراسة المثل متعددة الخطية و طرق بنائها.

## Mots clés

Opérateurs linéaires bornés, valeur absolu d'un opérateur, trace d'un opérateur linéaire, les classes de Schatten, idéaux engendrés par les classes de Schatten.

# Table des matières

Remerciements	i
Résumé	ii
Notation	iii
Introduction	1
<b>1 Les opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert</b>	<b>2</b>
1.1 Opérateurs linéaires bornés . . . . .	2
1.1.1 Adjoint d'un opérateur . . . . .	5
1.1.2 Opérateurs linéaires compacts . . . . .	8
1.2 Théorème spectral . . . . .	11
1.2.1 Résolvant, Spectre d'un opérateur . . . . .	11
1.2.2 L'inverse d'un opérateur . . . . .	11
1.2.3 Décomposition de Schmidt . . . . .	14
<b>2 Espaces de Schatten</b>	<b>15</b>
2.1 Décomposition polaire . . . . .	15
2.1.1 Opérateur linéaire positif . . . . .	15
2.1.2 Valeur absolue d'un opérateur . . . . .	16
2.1.3 Valeur singulière d'un opérateur . . . . .	17
2.2 Opérateurs à trace et de Hilbert-Schmidt . . . . .	18
2.2.1 Trace d'un opérateur linéaire . . . . .	18
2.2.2 Classe des opérateurs à trace . . . . .	20
2.2.3 Classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt . . . . .	21
2.3 Les classes de Schatten . . . . .	24
<b>3 Idéaux engendrés par les classes de Schatten</b>	<b>31</b>
3.1 Idéaux multilinéaires et leurs méthodes de constructions . . . . .	31
3.1.1 Les applications multilinéaires . . . . .	31
3.1.2 Idéaux d'opérateurs multilinéaires . . . . .	32

## TABLE DES MATIÈRES

---

3.1.3	Méthodes de construction . . . . .	33
3.1.4	Généralisation des opérateurs linaires sommants . . . . .	34
3.2	Idéaux multilinéaires engendrés par un classe de Schatten . . . . .	38
3.2.1	L'idéal multilinéaire de type $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{L}$ . . . . .	38
3.2.2	Relation avec l'espace $\mathcal{D}_p^m$ . . . . .	38
3.2.3	Caractérisation de la classe $\mathcal{S}_2 \circ \mathcal{L}$ . . . . .	42
3.2.4	L'idéal multilinéaires de type $\mathcal{L}(\mathcal{S}_p)$ . . . . .	43
	<b>Références</b> . . . . .	<b>45</b>

# Introduction

Le présent travail se situe dans le cadre de la théorie des opérateurs compact. Il porte essentiellement sur le développement des idéaux multilinéaires engendrés par les classes de Schatten. En 1983 PIETSCH a donné des méthodes de construction permettant d'engendrer des idéaux multilinéaires à partir d'un idéal linéaire. Leur grande motivation était d'établir des liens entre les opérateurs linéaires et multilinéaires. Dans ce mémoire, on va traiter les idéaux multilinéaire engendrés par les classes de Schatten  $\mathcal{S}_p$ . Ces dernières classes ont été introduites par R. SCHATTEN et J. VON NEUMANN [1946-1948]. La classe  $\mathcal{S}_2$  coïncide avec celle des opérateurs linéaires de Hilbert-Schmidt. Les classes de Schatten considèrent aussi comme un exemple fondamental des espaces  $L_p$  non-commutatif introduits nouvellement.

Le mémoire s'articule autour de trois chapitres. Dans le premier chapitre, on va donner un aperçu général sur les opérateurs linéaires compact. On commence par les opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de Banach puis sur un espace de Hilbert. Ensuite, on va étudier certaines propriétés et résultats importants concernant les opérateurs linéaires compact. On termine ce chapitre par un survol sur la théorie spectral des opérateurs compact.

Dans le deuxième chapitre, on étudiera les classes de Schatten  $\mathcal{S}_p$ , à partir de la définition d'un opérateur positif et leur valeur absolu, nous donnons la définition d'une valeur singulière d'un opérateur compact et la notion de la trace, qui est un outil efficace pour construire les classes  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ , puis généraliser à  $\mathcal{S}_p$  pour  $0 < p < \infty$ . Et nous montrons beaucoup de propriétés qui sont caractériser ces classes, par exemple le théorème d'inclusion. Nous consacrerons le reste de ce chapitre à donner le théorème de dualité relatif à ces classes ; *i.e.*,  $(\mathcal{S}_p)^* = \mathcal{S}_{p^*}$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ .

Dans le troisième chapitre, on fera une étude approfondie sur les idéaux multilinéaires et leurs méthodes de construction. Nous allons d'abord commencer par la définition d'une application multilinéaires, et la notion d'un idéal multilinéaires, et les méthodes de construction, puis nous citons quelque généralisations sur les opérateurs linéaires somnants. Dans la dernière nous définissons les idéaux multilinéaires engendrés par les classes de Schatten  $\mathcal{S}_p$ .

## Références

- [Abd11] B. ABDELAZIZ, *Les classes de Schatten et opérateurs multilinéaires de Hilbert Schmidt*, Mémoire Magister en sciences, Université de M'sila (Algérie), **2011**.
- [AE98] J.M. ALMIRA & F. P. EREZ ACOSTA, *Convergence in Generalized Schatten classes of operators*, Vol. L III - Fasc. II, pp. 305 - 317, Spain , **1998**.
- [AM07] D. ACHOUR L. MEZRAG, *On the Cohen strongly  $p$ -summing multilinear operators*, J. Math. Anal. Appl. 327, 550 – 563, **2007**.
- [Bel13] J. BELL, *Trace class operators and Hilbert-Schmidt operators*, University of Toronto, Ontario, Canada, **2013**.
- [Boc84] N. BOCCARA, *Analyse Fonctionnelle*, Ellipses, Paris, **1984**.
- [Bot06] G. BOTELHO, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note di Matematica 25, 69-102, Université Federal de Uberlandia, Brazil, **2006**
- [BPR07] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO, & P. RUEDA, *On Composition Ideals of Multilinear Mappings and Homogeneous Polynomials*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 43, 1139 – 1155, Université de Kyoto, **2007**.
- [Bra87] H. A. BRAUNSS, *Multi-ideals with special properties*, Blätter Potsdamer Forschungen1/87, Potsdam, **1987**.
- [Bre87] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, MASSON, Université Pierre et Marie Curie, **1987**.
- [Cam12] J. R. CAMPOS, *Multiple Cohen strongly summing operators ideals coherence and compatibility*, arXiv :1207.6664 v3 [math.FA], Université Federal da Paraíba, Brazil, **2012**.
- [Coh73] J. S. COHEN, *Absolutely  $p$ -Summing,  $p$ -Nuclear Operators and Their Conjugates*, Math. Ann. 201, 177 - 200, **1973**.
- [Cra03] D. CRAMER, *Trace Ideals and (Modified) Fredholm Determinants*, University of Missouri, Columbia, MO 65211, USA, **2003**.
- [DJT95] J. DIESTEL H. JARCHOW & A. TONGE, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University, **1995**.
- [Dwy71] T. A. W. DWYER III, *Partial differential equations in Fischer-Fock spaces for the Hilbert-Schmidtholomorphy type*, Bull. Amer. Math. Soc. 77, 725 - 730 **1971**.

## RÉFÉRENCES

---

- [God03] R. GODEMENT, *Analyse mathématique IV*, Springer, Université Paris VII, **2003**.
- [Kac04] M. KACIM, *Étude des troncatures d'opérateurs*, Thèse Doctorat en sciences, Université D'Orléans, **2004**.
- [KR83] R. V. KADISON & J. R. RINGROSE, *Fundamentals of the theory of operator algebras*, ACADEMIC PRESS, **1983**.
- [Lév03] P. LÉVY-BRUHL, *Introduction à la théorie spectrale*, DUNOD, Paris, **2003**.
- [Lov05] S. LOVERA, *Propriétés Spectrales de l'Opérateur Solution Canonique du  $\bar{\partial}$  et des Opérateurs de Hankel de Symbole Antiholomorphe*, Thèse Doctorat en sciences, Université de Provence, **2005**.
- [Mar09] J. P. MARCO, *Mathématique L3 Analyse*, Pearson, **2009**.
- [Mas95] T. MASSON, *Géométrie non commutative et applications à la théorie des champs*, Thèse Doctorat en sciences, Université de Paris XI Orsay, **1995**.
- [Mat03] M. C. MATOS, *Fully-absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings*, Collect. Math. 54, 111 – 136, Université de Barcelona, **2003**.
- [Mau02] B. MAUREY, *Cours d'Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale*, Université Paris Diderot - Paris 7, **2002**.
- [Men05] C. A. MENDES, *On factorization of Hilbert-Schmidt mappings*, J. Math. Anal. Appl. 304, 137 – 146, **2005**.
- [Mez10] L. MEZRAG, *Characterization of  $l_r$ -dominated  $m$ -linear operators*, Vol. 43, nr 4, 851 - 863 Université de M'sila, **2010**.
- [Pie83] A. PIETSCH, *Ideals of multilinear functionals*, (designs of a theory), Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in Theoretical Physics, 185-199. Leipzig. Teubner-Texte, **1983**.
- [PV03] D. PÉREZ-GARCÍA & I. VILLANUEVA, *Multiple summing operators on Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 285, 86 – 96, Université Complutense de Madrid, **2003**.
- [Rya02] R. A. RYAN, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, ISBN 1852334371, Springer, **2002**.
- [Saa10] K. SAADI, *Les opérateurs multi  $p$ -sommants et leurs applications*, Thèse Doctorat en sciences, Université Hadj LAKHDAR Batna (Algérie), **2010**.