



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et fondamentales

Par

MERNIZ Walid

Sujet

Equation de la chaleur et traitement de l'Image

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Brahim	BOUDERAH	Professeur	U.de M'Sila	Président
Nouredine	BENHAMIDOUCHE	Professeur	U.de M'Sila	Rapporteur
Douadi	MIHOUBI	Professeur	U.de M'Sila	Examineur

Promotion: 2010/2011

Table Des Matières

1	Introduction	5
1.1	La société de l'image	5
1.2	Qu'est-ce qu'une image numérique?	6
1.3	A propos Des Equations aux Dérivées Partielles (EDP)	7
2	Les Equations aux Dérivées Partielles	9
2.1	Stratégies d'étude (EDP)	9
2.1.1	Un problème bien posé, les solutions classiques	9
2.1.2	Les difficultés typiques	10
2.2	L'équation de la chaleur en Dimension 1	11
2.2.1	La transformée de Fourier	11
2.2.2	La méthode de transformée de Fourier	24
2.2.3	L'équation de la chaleur et le noyau de Gauss	27
2.3	L'équation de la chaleur en Dimension 2	29
2.3.1	Solution fondamentale	29
2.3.2	Un problème aux valeurs initiales	33
2.3.3	Propriétés des solutions	36
3	Amélioration de l'image	40
3.1	Qu'est-ce qu'une image?	40
3.2	Echantillonnage et quantification	41
3.2.1	Les concepts de base de l'échantillonnage et la quantification	41
3.2.2	La représentation des images numériques	42

3.3	Le voisinage d'un pixel	44
3.4	L'importance et le sens de la convolution	45
3.4.1	Convolution numérique	46
3.5	Les méthodes à base d' EDP	47
3.5.1	Le lissage des équations aux dérivées partielles	47
3.6	Le filtrage Gaussien	49
3.7	Un exemple local	51
3.8	Le traitement d'image Dans Matlab	52
	Annexe A.	53
	Bibliographie	54

Liste Des Figures

1-1	Une image numérique n'est rien d'autre qu'un tableau à deux dimensions de pixels avec des valeurs de luminosité attribué.	7
1-2	Par exemple l'image numérique: (a) à faible résolution, (b) à faible contraste, (c) nuances graduées, (d) des transitions nettes et, (e) des éléments fins.	8
2-1	Graphe de f dans l'exemple 1.	13
2-2	Graphe de \hat{f} dans l'exemple 1.	14
2-3	Graphe de f dans l'exemple 2.	15
2-4	Graphe de $ \hat{f} $ dans l'exemple 2.	16
2-5	Graphique de $f * f$	22
2-6	Noyau de Gauss, $g_t(x)$, est l'une des fonctions les plus importantes en mathématiques appliquées. Pour chaque $t > 0$, le graphe de $g_t(x)$ est une courbe en forme de cloche, symétrique par rapport à l'axe des y. Comme t tend vers zéro, les courbes deviennent de plus en plus localisées près de zéro. L'aire sous chaque courbe est constante, alors même que t varie.	28
2-7	Principe du maximum fort pour l'équation de la chaleur.	37
3-1	Espace de coordonnées cartésiennes 2-D d'une image numérique $M \times N$	41
3-2	Convention de coordonnées utilisés dans ce mémoire pour représenter des images numériques.	43
3-3	Connectivité de voisinage de l'image (à gauche) et exemple de voisinage 3×3 centré à un emplacement de pixel spécifique de l'image.	44
3-4	Le calcul d'une convolution 1-D intégrante.	46

3-5	Convolution discrètes. Le pixel central du noyau et le pixel cible dans l'image sont indiqués par l'ombrage foncé. Le noyau est "collée "sur l'image afin que le centre de pixels et la cible coïncident. La valeur filtrée du pixel cible est alors donnée par une combinaison linéaire des pixels de voisinage, les poids spécifiques étant déterminées par les valeurs du noyau. Dans ce cas précis la cible de la valeur initiale 35 a comme valeur filtrée de 14.	47
3-6	Extension de u_0 principalement définie sur $[0, 1]^2$ à \mathbb{R}^2 par symétrie et la périodicité.	48
3-7	Noyaux de filtre Gaussien $3 \times 3 \sigma = 1$, $11 \times 11 \sigma = 2$ et $21 \times 21 \sigma = 4$ (les valeurs numériques sont non normalisée.	50
3-8	Un filtre gaussien (5×5 avec $\sigma = 2$) appliqué à (a) l'image originale (b) de bruit sel et poivre et (c) images de bruit Gaussien de la figures 4.9.	50
3-9	Image de la faculté MI avec un bruit Gaussien	51
3-10	Image de la faculté MI filtrée par un noyau de Gauss	52

Remerciement

En préambule à ce mémoire, je souhaitais adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

*Je tiens à remercier sincèrement le professeur Monsieur **BENHAMDOUCHE** Nouredine, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.*

*Je remercie particulièrement le professeur Mr Brahim **BOUDERAH** qui a aimablement accepté de présider le jury.*

*Je remercie le professeur Mr Douadi **MTHOUBI** qui m'a honoré d'être membre de jury.*

Je n'oublie pas mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire. Merci à tous et à toutes.

Chapitre 1

Introduction

1.1 La société de l'image

Notre société est souvent désignée comme étant une "société de l'information." Elle pourrait aussi bien être définie comme une "société de l'image." Ce n'est pas seulement parce que l'image est un outil très puissant et utilisée comme moyen de communication, mais aussi parce qu'elle est un moyen simple, compact, et étendus à représenter le monde physique. Si on y pense, il est en effet frappant de constater à quel point les images sont omniprésentes dans notre vie, et combien nous comptons sur elles.

Les progrès réalisés dans les dispositifs d'acquisition font partie de l'origine d'un tel phénomène. Une énorme quantité d'informations numériques est disponible. La deuxième origine est naturellement l'augmentation de la capacité des ordinateurs qui nous permettent de traiter de plus en plus des données. Cela a entraîné une nouvelle discipline connue sous le nom de vision par ordinateur.

Par exemple, l'imagerie médicale a fait un usage considérable des images depuis les premiers jours. De nombreux dispositifs qui existent sont basés sur les ultrasons, rayons X, scanners, etc. Les images produites par ceux-ci peuvent ensuite être traitées pour perfectionner leur qualité, améliorer certaines fonctionnalités, ou de combiner efficacement les différentes informations (fusion).

Un autre domaine important qui nous concerne directement est la télédétection. Ceci désigne les applications où nous avons besoin d'analyser, de mesurer, d'interpréter des scènes à distance.

En plus des applications de surveillance de la défense et de la vidéo et l'analyse du trafic routier, l'observation des ressources de la terre est un autre domaine important. Le traitement d'image fournit des outils pour suivre et quantifier les changements dans les forêts, l'approvisionnement en eau, l'urbanisation, la pollution, etc. Il est également, largement utilisé pour la prévision du temps à analyser d'énormes quantités de données.

Au-delà de ces thèmes généraux, on pourrait aussi parler de beaucoup de différentes applications de traitement d'image où est impliqué. Il s'agit notamment de «world wide web», la reconnaissance de caractères, de la reconstruction en 3-D de scènes ou d'objets à partir d'images, contrôle de la qualité, la robotique, analyse des empreintes digitales, et des bases de données d'art virtuelle.

Sans nécessairement le savoir, nous sommes des consommateurs de traitement d'image sur une base quotidienne.

1.2 Qu'est-ce qu'une image numérique?

Une image numérique (aussi appelée une image discrète) vient d'un monde continu. Elle est obtenue à partir d'une image analogique par échantillonnage et quantification. Fondamentalement, l'idée est de superposer une grille régulière sur une image analogique et d'attribuer une valeur numérique à chaque carré de la grille, par exemple la luminosité moyenne dans ce carré. Chaque carré est appelé un pixel, pour l'élément image, et sa valeur est le niveau de gris ou la luminosité.

Selon le type d'image, le nombre de bits utilisés pour représenter la valeur de pixel peut varier. Représentations des pixels commun sont des octets non signés (0 à 255) et en virgule flottante. Pour décrire un pixel, on a aussi besoin de plusieurs canaux (ou interdictions): par exemple, un champ de vecteurs a deux composantes, une image couleur est décrite avec trois canaux, *rouge*, *vert* et *bleu*.

La dernière caractéristique importante d'une image est sa taille (ou résolution). C'est le nombre de lignes et de colonnes dans l'image. Juste pour vous donner une idée, des appareils photo numériques typiques donne maintenant des images de taille 320×240 et peuvent atteindre 3060×2036 pour les professionnels. Pour un cinéma numérique nous considérons une images

de taille 720×576 (format de vidéo standard), 1920×1440 (haute définition) ou plus; pour les images de l'imagerie médicale fonctionnelle IRM sont environ 128×128 .

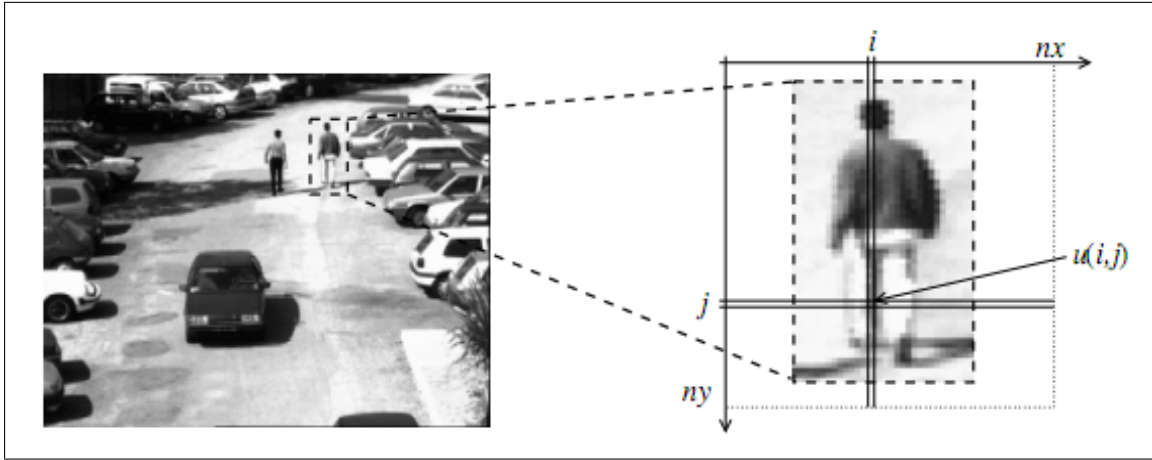


Figure 1-1: Une image numérique n'est rien d'autre qu'un tableau à deux dimensions de pixels avec des valeurs de luminosité attribué.

D'une certaine façon, plus la résolution est grande, plus l'image numérique est au monde physique. Comme dans le monde réel, une image est composée d'une grande variété de structures, et cela est encore plus complexe en raison de la numérisation et le nombre limité de niveaux de gris pour la représenter. Pour donner une idée, nous montrons à la figure 1.2 une image et quelques gros plans sur les différentes parties. Cela montre les effets de la faible résolution (certaines régions auraient besoin plus de pixel d'être représentées) et un faible contraste, différents types de «texture», contours progressifs ou tranchants, et beaux objets. Cela donne une idée de la complexité de trouver une approche qui permet de faire face à des problèmes différents ou des structures en même temps.

1.3 A propos Des Equations aux Dérivées Partielles (EDP)

De nombreuses approches ont été développées pour traiter ces images numériques, et il est difficile de dire lequel est le plus naturel que l'autre. Traitement de l'image a une longue histoire. Peut être la plus ancienne des méthodes proviennent de $1 - D$ des techniques de traitement du signal. Elles s'appuient sur la théorie du filtre (linéaire ou non), sur l'analyse

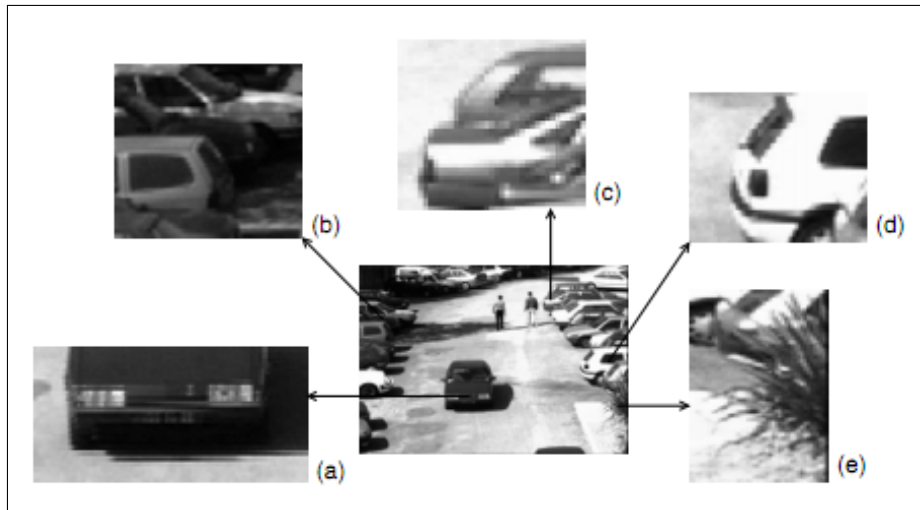


Figure 1-2: Par exemple l'image numérique: (a) à faible résolution, (b) à faible contraste, (c) nuances graduées, (d) des transitions nettes et, (e) des éléments fins.

spectrale, ou sur quelques concepts de base de probabilité et de statistique.

Aujourd'hui, des outils plus sophistiqués ont été développés. Trois grands axes se dégagent: la modélisation stochastique, ondelettes et équations aux dérivées partielles (EDP) . Nous ne considérons pas ici ces approches et de se concentrer sur les méthodes à base d' EDP. Ils ont été aménagés intensivement en analyse d'images depuis les années 1990.De nombreux livres sont maintenant disponibles, voir par exemple [1,2,6,5].

EDP, qui appartiennent à l'une des parties les plus importantes de l'analyse mathématique, sont étroitement liés au monde physique. Chaque scientifique vient à travers l'équation d'onde ou l'équation de la chaleur, et les noms d'Euler, Poisson, Laplace, etc, sont tout à fait familier. Si EDP viennent à l'origine physique et la mécanique, on peut rencontrer de plus en plus dans d'autres domaines comme la biologie et la finance et maintenant dans l'analyse de l'image. L'un des principaux centres d'intérêt dans l'utilisation EDP est que la théorie est bien établie. Bien sûr, les équations aux dérivées partielles sont écrites dans un cadre continu, se référant aux images analogue, et, une fois l'existence et l'unicité de la solution ont été prouvés. Nous espérons que cette mémoire illustrera bien cette idée.

Chapitre 2

Les Equations aux Dérivées Partielles

2.1 Stratégies d'étude (EDP)

Comme expliqué au point 1.1, notre objectif est la découverte des façons de résoudre des équations aux dérivées partielles de toutes sortes, mais, comme devrait maintenant être clair, compte tenu des nombreux exemples divers prévues, ce n'est pas une tâche facile. Et en effet la question même de ce que signifie «résoudre »un EDP donné peut être subtile, en grande partie en fonction de la structure particulière du problème à portée de main.

2.1.1 Un problème bien posé, les solutions classiques

La notion informelle d'un problème bien posé capture bon nombre des caractéristiques souhaitables de ce que cela signifie pour résoudre un EDP. Nous disons que pour un problème donné une équation aux dérivées partielles est bien posée si

(a) le problème a en fait une solution;

(b) cette solution est unique;

et

(c) la solution dépend continûment des données figurant dans le problème.

La dernière condition est particulièrement importante pour les problèmes qui découlent des demandes physiques: nous préférons que notre solution (unique) change seulement un peu lorsque les conditions du problème changent un peu. (Pour de nombreux problèmes, d'autre part, le caractère unique ne doit pas être prévu. Dans ces cas, les tâches mathématiques principales sont à classer et caractérisent les solutions.)

Maintenant, il serait clairement souhaitable de «résoudre» EDP de telle manière que (a) - (c) soit maintenus. Mais notez que nous n'avons pas encore clairement défini ce qu'on entend par une «solution». Devrions-nous demander, par exemple, qu'une "solution" u doit être analytique réelle ou au moins infiniment différentiable? Ca pourrait être souhaitable, mais peut-être que nous demandons trop. Peut-être qu'il serait plus sage d'exiger une solution d'une EDP d'ordre k à k fois au moins continûment différentiable. Ensuite, au moins toutes les dérivées qui figurent dans la déclaration du EDP doit être exister et continue, mais peut-être certaines dérivées plus n'existent pas. Permettez-nous d'une façon informelle d'appeler une solution avec beaucoup de finesse, une solution classique de l' EDP: ce qui a certainement l'idée la plus évidente de la solution.

Ainsi, en résolvant une équation aux dérivées partielles dans le sens classique , nous voulons dire que c'est possible d'écrire une formule pour une solution classique satisfaisant (a) - (c) ci-dessus, ou au moins pour voir une telle solution existe, et d'en déduire plusieurs de ses propriétés.

2.1.2 Les difficultés typiques

Voici quelques principes vagues, mais en général, qui peuvent être utile de garder à l'esprit:

- (1) Les équations non linéaires sont plus difficiles que les équations linéaires; et, en effet, plus la non-linéarité affecte les dérivées d'ordre supérieur, plus l'EDP est difficile.
- (2) L'EDP d'ordre supérieur sont plus difficiles que EDP d'ordre inférieur.
- (3) Les systèmes sont plus difficiles que les équations simples.
- (4) Les équations aux dérivées partielles comportant plusieurs variables indépendantes sont plus dures que les EDP comportant peu de variables indépendantes.

(5) Pour la plupart des équations aux dérivées partielles, il n'est pas possible d'écrire des formules explicites pour les solutions.

Aucune de ces affirmations est sans exceptions importantes.

2.2 L'équation de la chaleur en Dimension 1

2.2.1 La transformée de Fourier

Nous allons utiliser la fonction exponentielle complexe pour écrire la représentation de la transformée de Fourier sous forme complexe. Cette nouvelle représentation dispose d'une paire de transformations importantes. Comme vous le verrez dans cette section, le concept de transformée paires offre un moyen commode d'indiquer les propriétés fondamentales de fonctionnement de la transformée de Fourier, qui sont très utiles dans la résolution de problèmes aux limites.

Envisager une fonction f lisse par morceaux continue et intégrable. En commençant par la représentation intégrale de Fourier, nous avons

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos wt \cos wx + \sin wt \sin wx) dt dw \\
 (\cos(a - b)) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos w(x - t) dt dw \\
 (\cos(u)) &= \frac{1}{2}(e^{iu} + e^{-iu}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{iw(x-t)} + e^{-iw(x-t)}) dt dw \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iw(x-t)} dt dw + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iw(x-t)} dt dw
 \end{aligned}$$

Si l'on change w à $-w$ dans le second terme et d'ajuster les limites de $-\infty$ à 0 , on obtient, après avoir ajouté les deux intégrales

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iw(x-t)} dt dw \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt}^{\hat{f}(w)} dw
\end{aligned}$$

Il s'agit de la **forme complexe de la représentation intégrale de Fourier**, qui comprend la paire de transformation suivante:

TRANSFORMEE DE FOURIER

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx \quad (-\infty < w < \infty) \quad (2.1)$$

TRANSFORMEE DE FOURIER INVERSE

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \hat{f}(w) dw \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2.2)$$

Il existe d'autres conventions pour la transformée de Fourier. Par exemple, nous pourrions choisir $\hat{f}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx$, puis la transformée de Fourier inverse devient $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \hat{f}(w) dw$. Dans la définition de f , nous avons utilisé x comme une variable d'intégration, au lieu de t . Les symboles $\mathcal{F}(f)(w)$ et $\mathcal{F}^{-1}(f)(x)$ sont également utilisés pour désigner la transformée de Fourier et son inverse, respectivement. Parfois, pour être plus précis, nous allons écrire $\mathcal{F}(f(x))(w)$ au lieu de $\mathcal{F}(f)(w)$, si f n'est pas continue en x , le côté gauche de (2,2) doit être remplacé par $(f(x+) + f(x-))/2$. L'intégrale de la transformée de Fourier inverse ne peut pas exister en tant que deux faces intégrale impropre, en général, cette intégrale doit être calculée comme une valeur principale de Cauchy: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{iwx} \hat{f}(w) dw$.

Mettre $w = 0$ dans (2, 1), nous constatons que

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Ainsi, la valeur de la transformée de Fourier à $w = 0$ est égale à la surface signée entre le graphique de $f(x)$ et l'axe des x , multipliée par un facteur de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Exemple 1 *Transformée de Fourier*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \leq a \\ 0 & \text{if } |x| > a \end{cases}$$

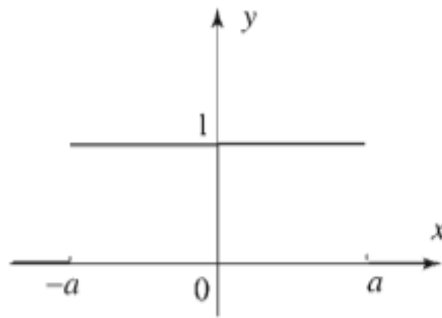


Figure 2-1: Graphe de f dans l'exemple 1.

Ce qui est $\hat{f}(0)$? Comment nous pouvons exprimer f comme une transformée de Fourier inverse.

Solution 1 *pour $w \neq 0$ nous avons*

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-iwx} dx \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi} iw} e^{-iwx} \Big|_{-a}^a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin aw}{w}. \end{aligned}$$

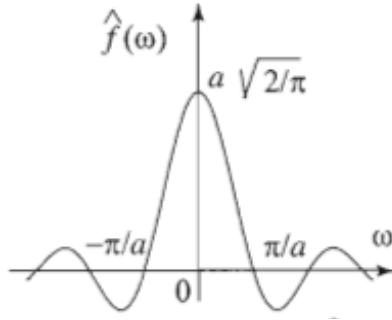


Figure 2-2: Graphe de \hat{f} dans l'exemple 1.

Pour $w = 0$ nous avons $\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a dx = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ comme

$$\lim_{w \rightarrow 0} \hat{f}(w) = \lim_{w \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin aw}{w} = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \hat{f}(0)$$

Il s'ensuit que $\hat{f}(w)$ est continue en 0 (figure 2.2), et on peut écrire $\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin aw}{w}$ pour tous w .

(b) pour exprimer f comme une transformée de Fourier inverse, nous utilisons (2, 2) et d'obtenir

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin aw}{w} dw = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \frac{\sin aw}{w} dw \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos(wx) - i \sin(wx)) \frac{\sin aw}{w} dw = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos wx \sin aw}{w} dw \end{aligned}$$

parce que $\sin wx \frac{\sin aw}{w}$ est une fonction impaire de w et donc son intégrale est nulle.

La transformée de Fourier dans l'exemple 1 est continue sur toute la ligne réelle, même si la fonction a sauté la discontinuité en $x = \pm a$. En fait, il peut être démontré que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable est toujours continue.

Dans l'exemple suivant, nous allons utiliser la valeur absolue d'un nombre complexe. Rappelons-nous que, si $z = a + ib$, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ en particulier si $z = e^{-ixw}$ alors

$$|e^{-ixw}| = |\cos(xw) - i \sin(xw)| = \sqrt{\cos^2(xw) + \sin^2(xw)} = 1$$

Exemple 2 *Le calcul de la transformée de Fourier*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{if } x \leq 0. \end{cases}$$

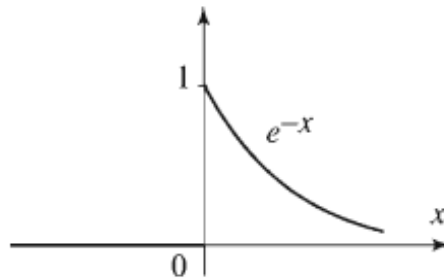


Figure 2-3: Graphe de f dans l'exemple 2.

Solution 2 *Nous avons*

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-w(1+iw)} dx \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)} e^{-iwx} e^{-x} \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

comme $|e^{-ixw}| = 1$, il s'ensuit que $\lim_{x \rightarrow \infty} |e^{-x(1+iw)}| = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$, et ainsi de

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)} = \frac{1-iw}{\sqrt{2\pi}(1+w^2)}.$$

figure 2.4 montre le graphique de la valeur absolue de \hat{f} . Là encore, il convient de noter que \hat{f} et $|\hat{f}|$ sont à la fois continue même si f n'est pas.

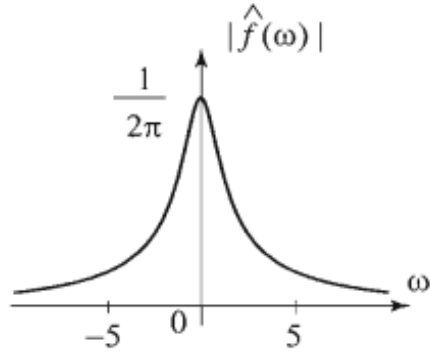


Figure 2-4: Graphe de $|\hat{f}|$ dans l'exemple 2.

L'exemple 2 illustre un fait remarquable que la transformée de Fourier peut être à valeurs complexes, même si la fonction est à valeurs réelles. En outre, la transformée de Fourier est continue mais pas intégrable, même pas comme une mauvaise deux côtés intégrante. Dans ce cas, l'intégrale (2,2) pour la transformée de Fourier inverse doit être calculée comme une valeur principale de Cauchy. En effet, nous pouvons vérifier que, en $x = 0$, nous avons $\frac{1}{2} = (f(0+) + f(0-))/2$, et la valeur principale de Cauchy de la transformée de Fourier inverse donne

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \hat{f}(w) dw &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \frac{1 - iw}{\sqrt{2\pi}(1 + w^2)} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\int_{-a}^a \frac{1}{1 + w^2} dw - \overbrace{i \int_{-a}^a \frac{w}{1 + w^2} dw}^{= 0} \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tel que défini par (2,1), la transformée de Fourier prend une fonction f et produit une nouvelle fonction \hat{f} , et la transformation inverse récupère la fonction d'origine f de \hat{f} . Ce procédé fait de paires de transformer un outil puissant pour la résolution d'équations aux dérivées partielles. Comme nous le verrons dans les sections suivantes, l'idée est de "transformée de Fourier" une équation donnée en une seule qui peut être plus facile à résoudre. Après avoir résolu l'équation transformée impliquant \hat{f} , on retrouve la solution du problème d'origine avec

la transformation inverse. Pour nous aider dans le traitement des équations transformées, nous développons les propriétés fonctionnelles de la transformée de Fourier.

Propriétés opérationnel

Nous allons étudier le comportement de la transformée de Fourier dans le cadre des opérations communes sur les fonctions: combinaison linéaire, la translation, la dilatation, la différenciation, la multiplication par polynôme, et la convolution.

Théorème 1 *Linéarité*

La transformée de Fourier est une opération linéaire, c'est, pour toute fonction intégrable f et g et les nombres réels a et b ,

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

Preuve 1

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(af + bg) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (af(x) + bg(x))e^{-iwx} dx \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx + \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-iwx} dx \\ &= a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g) \end{aligned}$$

Théorème 2 *Transformée de Fourier des dérivées*

(i) Supposons $f(x)$ est lisse par morceaux, $f(x)$ et $f'(x)$ sont intégrables, et $f(x) \rightarrow 0$ quand $|x| \rightarrow \infty$, puis

$$\mathcal{F}(f') = iw\mathcal{F}(f)$$

(ii) Si en plus $f''(x)$ est intégrable, et $f'(x)$ est lisse par morceaux et $\rightarrow 0$, comme $|x| \rightarrow \infty$ alors

$$\mathcal{F}(f'') = iw\mathcal{F}(f') = -w^2\mathcal{F}(f).$$

(iii) En général, si f et $f^{(k)}(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) sont lisses par morceaux et tendent vers 0 lorsque $|x| \rightarrow \infty$, et f et de ses dérivés de l'ordre à n sont intégrables, alors

$$\mathcal{F}(f^{(n)}) = (iw)^n \mathcal{F}(f)$$

Preuve 2

Parties (ii) et (iii) sont obtenues par des applications répétées de (i). Pour prouver (i), nous utilisons la définition de $\mathcal{F}(\acute{f})$ et d'intégrer par parties. Pour simplifier la preuve, on suppose en outre que f est lisse. Ensuite,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\acute{f})(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \acute{f}(x) e^{-iwx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-iwx} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-iw) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx \right] \\ &= 0 + iw\mathcal{F}(f) \quad (\text{comme } f(x) \rightarrow 0 \text{ en tant que } |x| \rightarrow \infty, \text{ et } |e^{-iwx}| = 1). \end{aligned}$$

Théorème 3 Dérivées des transformées de Fourier

(i) Supposons $f(x)$ et $xf(x)$ sont intégrables, puis

$$\mathcal{F}(xf(x))(w) = i \left[\hat{f} \right]'(w) = i \frac{d}{dw} \mathcal{F}(f)(w).$$

(ii) En général, si $f(x)$ et $x^n f(x)$ sont intégrables, alors

$$\mathcal{F}(x^n f(x)) = i^n \left[\hat{f} \right]^{(n)}(w).$$

Preuve 1

La partie (ii) découle de (i). Pour motiver (i), nous supposons que nous pouvons différencier sous l'intégrale. Ensuite,

$$\begin{aligned} [\hat{f}]'(w) &= \frac{d}{dw} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{dw} e^{-iwx} dx \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-iwx} dx = -i\mathcal{F}(xf(x))(w), \end{aligned}$$

et (i) fait suite à la multiplication des deux côtés par i . Cette preuve est valable si, par exemple f est lisse et disparaît en dehors d'un intervalle fini. Pour une fonction arbitraire f , on peut approcher f par des fonctions qui sont lisses et disparaissent en dehors d'un intervalle fini.

Convolution des fonctions

Nous élargissons notre liste de propriétés fonctionnelles en introduisant la convolution de deux fonctions f et g par

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt. \quad (2.3)$$

(le facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ est simplement pour plus de commodité. Si nous le laissons tomber de la définition de la convolution, il réapparaîtra dans sa transformée de Fourier.) La convolution de f et g est une opération binaire, qui combine la translation, la multiplication des fonctions, et l'intégration. Son effet sur les fonctions f et g est difficile d'expliquer directement, comme les exemples suivants illustrent. (Il a une description simple en termes de la transformée de Fourier, comme nous le verrons dans le théorème 4.) Observons d'abord que la convolution est une opération commutative, c'est-à-dire $f * g(x) = g * f(x)$. Cela fait suite en faisant un changement de variables ($t \leftrightarrow t - x$) dans (2.3).

Exemple 3 Convolution avec le cosinus

Supposons que f est intégrable et paire ($f(-x) = f(x)$) pour tout x et soit $g(x) = \cos ax$. Pour tous les nombres réels a : $f * g(x) = \cos(ax)\hat{f}(a)$

Solution 3 De la définition et le fait que $f * g = g * f$, nous avons

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos[a(x-t)] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(ax) \cos(at) + \sin(ax) \sin(at)] dt. \end{aligned}$$

puisque f est paire, le produit $f(t) \sin at$ est impair, d'où $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin at dt = 0$, et ainsi de

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \cos(ax) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(at) dt \\ &= \cos(ax) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(at) - i \sin(at)] dt \\ &= \cos(ax) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iat} dt = \cos(ax) \hat{f}(a). \end{aligned}$$

Théorème 4 Transformées de Fourier des convolutions

Supposons que f et g sont intégrable alors

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$$

Preuve 2

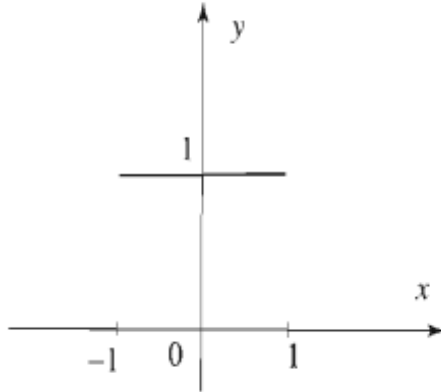
Théorème 4 est exprimé en disant que la transformée de Fourier prend convolutions dans les produits.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-iwx} dx g(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iwu} du e^{-iwt} g(t) dt \\ (u &= x-t, du = dx) \\ &= \mathcal{F}(f)(w)\mathcal{F}(g)(w). \end{aligned}$$

Exemple 4 Transformée de Fourier d'une convolution

Considérons la fonction $f(x) = 1$ si $|x| < 1$ et 0 sinon. Le graphique de cette fonction est représentée sur la figure 2.4. De l'exemple 1, nous avons

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin w}{w}.$$



Graphique de f .

Nous voulons calculer $f * f$, la convolution de f avec elle-même. Au lieu de calculer directement à partir de (2,3), nous allons utiliser le théorème 4, comme suit. Nous avons

$$\mathcal{F}(f * f)(w) = \hat{f}(w)^2 = \frac{2}{\pi} \frac{\sin^2 w}{w^2}$$

à l'aide de la transformée de Fourier inverse, avec l'aide de la table des transformées de Fourier à l'annexe A, nous trouvons

$$f * f(x) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{2}{\pi} \frac{\sin^2 w}{w^2} \right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{|x|}{2}\right) & \text{if } |x| < 2, \\ 0 & \text{if } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Le graphe de $f * f(x)$ est représentée sur la figure 2.5. Notez que $f * f$ est continue, même si f n'est pas.

Le reste de cette section est consacrée à l'étude de **la fonction gaussienne** $f(x) = e^{-x^2}$ et sa transformée de Fourier. Cette fonction joue un rôle clé dans la solution de l'équation de la chaleur. Nous avons besoin de la fameuse intégrale impropre

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{2.4}$$

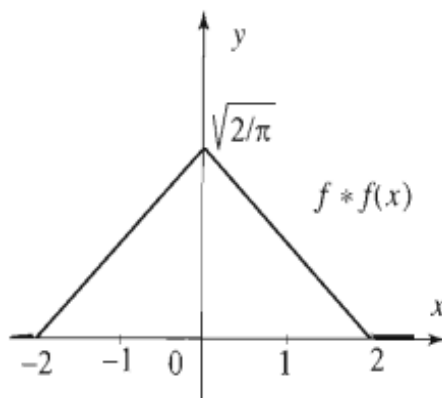


Figure 2-5: Graphique de $f * f$.

Donnons ici une preuve plus directe, on fait le carré de I en utilisant les coordonnées polaires ($r^2 = x^2 + y^2$), $dx dy = r dr d\theta$ et d'obtenir

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left. -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right|_0^{\infty} d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi,
 \end{aligned}$$

et (2,4) fait suite à la prise des racines carrées.

Théorème 5 *Transformée de la gaussienne*

Soit $a > 0$ nous avons

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{ax^2}{2}})(w) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{w^2}{2a}}$$

Preuve 3

Soit $f(x) = e^{-\frac{ax^2}{2}}$, Une simple vérification montre que f satisfait l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$f'(x) + axf(x) = 0.$$

Prenant transformées de Fourier et en utilisant les théorèmes 1, 2 et 3, nous obtenons

$$w\hat{f}(w) + a\frac{d}{dw}[\hat{f}](w) = 0.$$

Ainsi \hat{f} satisfait même équation différentielle linéaire du premier ordre. Pour résoudre cette équation en \hat{f} , on trouve

$$\hat{f}(w) = Ae^{-\frac{w^2}{2a}},$$

où A est une constante arbitraire. Pour compléter la preuve, nous devons montrer que $A = \frac{1}{\sqrt{a}}$ nous avons

$$\begin{aligned} A &= \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ax^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du && (u = \sqrt{\frac{a}{2}}x, \sqrt{\frac{2}{a}}du = dx) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} && (\text{par(2.4)}). \end{aligned}$$

Remplaçant a par $2a$ dans le théorème 5 donne

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(w) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}} \quad (a > 0). \quad (2.5)$$

En prenant $a = 1$ dans le théorème 5 donne

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}})(w) = e^{-\frac{w^2}{2}}.$$

Cette identité remarquable dit que $e^{-\frac{x^2}{2}}$ est sa propre transformée de Fourier.

Théorème 5 peut être utilisé pour calculer certaines intégrales intéressantes.

2.2.2 La méthode de transformée de Fourier

Ces problèmes sont modélisés mathématiquement par l'équation différentielle définie sur les régions infinie. Pour les problèmes à une dimension, nous distinguons deux types de régions infinies: l'extension infinie des intervalles de $-\infty$ à ∞ et les intervalles semi-infinie s'étendant d'un point (généralement à l'origine) à l'infini (généralement $+\infty$).

Dans cette section, nous développons la méthode de transformée de Fourier et de l'appliquer pour résoudre les équations de la chaleur sur la droite réelle.

Transformation des dérivées partielles

Tout au long de cette section, nous supposons que $u(x, t)$ est une fonction de deux variables x et t , où $-\infty < x < \infty$ et $t > 0$. En raison de la présence de deux variables, il faut veiller à identifier la variable par rapport à laquelle la transformée de Fourier est calculée. Par exemple, pour t fixé, la fonction $u(x, t)$ devient une fonction de la variable spatiale x , et en tant que telle, nous pouvons prendre sa transformée de Fourier par rapport à la variable x . On note cette transformation par $\hat{u}(w, t)$. Ainsi

TRANSFORMATION DE FOURIER DE LA VARIABLE x

$$\mathcal{F}(u(x, t))(w) = \hat{u}(w, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-iwx} dx. \quad (2.6)$$

Pour illustrer l'utilisation de cette notation, nous calculons des transformées très utiles. Nous supposons que la fonction $u(x, t)$, en fonction de x , a des propriétés suffisantes qui nous permettent d'utiliser librement les propriétés fonctionnelles de la transformée de Fourier de la section 2.2

TRANSFORMATION DE FOURIER et les dérivées partielles

Donnée $u(x, t)$ avec $-\infty < x < \infty$ et $t > 0$, nous avons

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial t} u(x, t)\right)(w) = \frac{d}{dt} \hat{u}(w, t); \quad (2.7)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^n}{\partial t^n} u(x, t)\right)(w) = \frac{d^n}{dt^n} \hat{u}(w, t), \quad n = 1, 2, \dots; \quad (2.8)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right)(w) = iw\hat{u}(w,t); \quad (2.9)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n}u(x,t)\right)(w) = (iw)^n\hat{u}(w,t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Les deux dernières identités sont des conséquences de (2, 6) et le théorème 2 de l'article 2.2. Pour prouver (2, 7) nous commençons par le côté droit et se différencier sous le signe intégrale par rapport à t :

$$\frac{d}{dt}\hat{u}(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)e^{-iwx} dx$$

La dernière expression est la transformée de Fourier $\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$ en fonction de x , et (2, 7) suit. La différenciation répétée sous le signe intégrale par rapport à t donne(2.8).

L'utilisation de la transformée de Fourier pour résoudre des équations aux dérivées partielles est mieux décrite par des exemples. Nous commençons par l'équation de la chaleur.

La solution fondamentale et homogène avec le problème de valeur initiale

Nous observons que l'équation de la chaleur implique une dérivée par rapport à la variable temps t , mais deux dérivées par rapport à la variable x .

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = \phi(x) & \text{(distribution de la température initiale)} \end{cases}$$

Supposons que u a une transformée de Fourier. Nous aurons besoin les faits suivants (ce qui nous prouve en utilisant la définition de la transformée de Fourier):

- $\hat{u}_t(w,t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(w,t)$ tirant la dérivée temporelle de l'intégrale:

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(w,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)e^{-iwx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} [u(x,t)e^{-iwx}] dx = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-iwx} dx \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [\hat{u}(w,t)]. \end{aligned}$$

- $\hat{u}_{xx}(w,t) = (iw)^2\hat{u}(w,t)$ l'intégration de deux fois par parties:

$$\hat{u}_{xx}(w,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)e^{-iwx} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x,t) [(-iw)e^{-iwx}] dx$$

$$\begin{aligned}
&= (iw) \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t) e^{-iwx} dx = (iw)^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-iwx} dx \\
&= (iw)^2 \hat{u}(k, t).
\end{aligned}$$

Nous savons que $u_t - c^2 u_{xx} = 0$ (pour une constante $\alpha > 0$) et $u(x, 0) = \phi(x)$. En prenant la transformée de Fourier de ces deux équations dit que

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(w, t) + c^2 w^2 \hat{u}(w, t) = 0 \text{ et } \hat{u}(w, 0) = \hat{\phi}(w).$$

La solution générale de l'équation différentielle du premier ordre en t est

$$\hat{u}(w, t) = A(w) e^{-c^2 w^2 t}$$

où $A(w)$ est une constante qui dépend de w , mise en $t = 0$ et en utilisant la transformée de la condition initiale, nous obtenons

$$\hat{u}(w, 0) = A(w) = \hat{\phi}(w)$$

par conséquent,

$$\hat{u}(w, t) = \hat{\phi}(w) e^{-c^2 w^2 t}$$

prenant transformée de Fourier inverse, nous obtenons la solution

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-c^2 w^2 t} e^{iwx} dw. \quad (2.11)$$

La formule (2.11) nous donne la solution du problème de la valeur thermique initiale sous la forme d'une intégrale impliquant la transformée de Fourier de la distribution de la chaleur initiale. Dans la section suivante, nous allons calculer cette intégrale et de donner la réponse comme une convolution de f et une fonction déterminée et connue comme le noyau chaleur ou du noyau de Gauss. Nous verrons que la forme de convolution de la solution peut être appliquée même si f n'a pas une transformée de Fourier.

2.2.3 L'équation de la chaleur et le noyau de Gauss

Dans la section précédente, nous avons utilisé la transformée de Fourier pour résoudre des problèmes familiers à valeur initiale, telle que l'équation de la chaleur. La solution a été exprimé comme une transformée de Fourier inverse impliquant la transformée de Fourier des données initiales. Pour des raisons pratiques, applications numériques, il est souhaitable d'évaluer la transformée de Fourier inverse et d'exprimer la solution en termes de données initiales lui-même. Dans cette section et la suivante, nous illustrons ces idées avec une applications importantes associées à l'équation de la chaleur. Commençons par le problème de la chaleur (par exemple 2, section 2.2)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad (2.12)$$

Afin d'appliquer la méthode de transformée de Fourier, nous supposons que f a une transformée de Fourier. Une fois que nous tirons la solution, nous allons l'appliquer dans des situations où la fonction f peut ne pas avoir une transformée de Fourier, nous savons que

$$\hat{u}(w, t) = \hat{f}(w)e^{-c^2 w^2 t} \quad (2.13)$$

et, par conséquent, en appliquant la transformée de Fourier inverse

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{-c^2 w^2 t} e^{iwx} dw \quad (2.14)$$

Notre objectif dans cette section est d'évaluer la transformée de Fourier inverse en termes de f . Nous constatons de (2, 13) que \hat{u} est le produit de deux transformées de Fourier l'un d'eux étant \hat{f} et l'autres $e^{-c^2 w^2 t}$. Rappelant que les produits de transformées de Fourier correspondent aux convolutions (théorème 4 de l'article 2.2), nous voyons que u est le produit de convolution f avec la fonction dont la transformée de Fourier est $e^{-c^2 w^2 t}$. Comme nous le verrons dans un instant, cette fonction est **le noyau de la chaleur dite** ou **le noyau de Gauss**

$$g_t(x) = \frac{1}{c\sqrt{2t}} e^{-x^2/4c^2 t}$$

(Nous pensons que le noyau de la chaleur $g_t(x)$ comme une famille de fonctions de x , une fonction pour chaque $t > 0$ (figure 2.7).) Ce qui nous amène au résultat suivant importants.

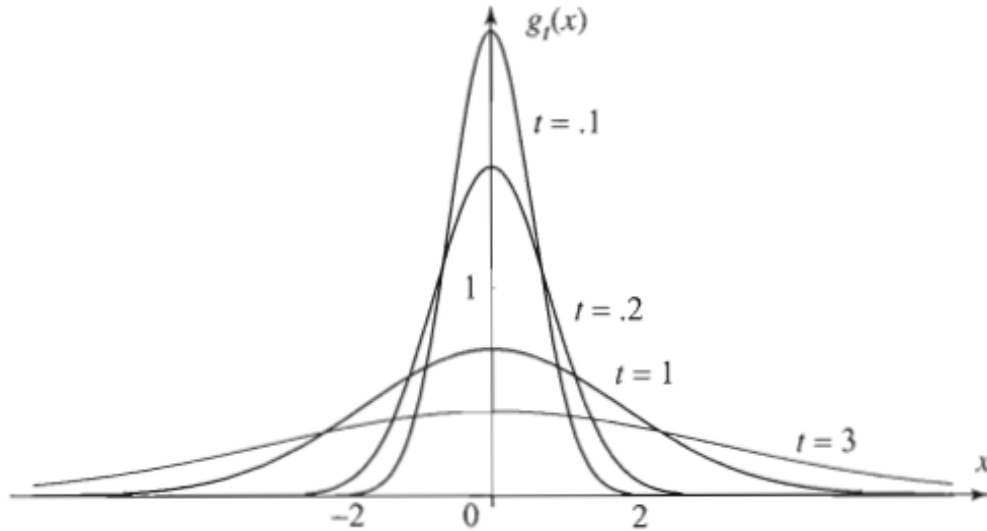


Figure 2-6: Noyau de Gauss, $g_t(x)$, est l'une des fonctions les plus importantes en mathématiques appliquées. Pour chaque $t > 0$, le graphe de $g_t(x)$ est une courbe en forme de cloche, symétrique par rapport à l'axe des y. Comme t tend vers zéro, les courbes deviennent de plus en plus localisées près de zéro. L'aire sous chaque courbe est constante, alors même que t varie.

Théorème 6 *Solution de l'équation de la chaleur comme CONVOLUTION*

La solution de l'équation de la chaleur (2, 12) avec répartition de la température initiale f est la convolution de f avec le noyau de la chaleur. Plus explicitement,

$$u(x, t) = \frac{1}{c\sqrt{2t}} e^{-x^2/4ct} * f = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-(x-s)^2/4c^2t} ds \quad (2.15)$$

Preuve 4

Nous devons montrer que la fonction $g_t(x) = \frac{1}{c\sqrt{2t}} e^{-x^2/4c^2t}$ a transformée de Fourier $e^{-c^2w^2t}$ mais ce n'est immédiate du théorème 5 de l'article 2.2, en prenant $\frac{a}{2} = \frac{1}{4c^2t}$ (ou $a = \frac{1}{2c^2t}$) dans ce théorème, nous obtenons

$$\hat{g}_t(w) = \frac{1}{c\sqrt{2t}} \sqrt{2c^2t} e^{-w^2c^2t} = e^{-w^2c^2t}$$

comme l'a soutenu.

Quelques commentaires sont dans la formule pour ce qui concerne (2, 15).

- Parce que le noyau de la chaleur (en fonction de x) décroît à 0 très rapidement quand $x \rightarrow \pm\infty$, la formule (2.15) peut être évaluée dans de nombreux cas intéressants, même si f n'a pas nécessairement une transformée de Fourier (au sens de l'article 2.2); par exemple, lorsque f est bornée ou un polynôme.
- Parce que la formule (2, 15) consiste à diviser par \sqrt{t} et t , nous ne pouvons pas simplement brancher $t = 0$ dans cette formule afin de vérifier la condition initiale $u(x, 0) = f(x)$. Alors, dans quel sens la solution (2, 15) satisfait à la condition initiale? Ecrivons la solution (2.15), $u(x, t) = g_t(x) * f(x)$, où g_t est le noyau de la chaleur. La solution satisfait la condition initiale dans le sens suivant: $\lim_{t \rightarrow 0} g_t(x) * f(x) = f(x)$ voir [3]

2.3 L'équation de la chaleur en Dimension 2

2.3.1 Solution fondamentale

Considérons l'équation de diffusion en deux dimensions en coordonnées cartésiennes:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{D} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

La constante D est le coefficient de diffusion. Notez que nous n'avons aucune puissance ou des fonctions complexes de dérivés de la fonction ϕ . Car les dérivées de ϕ est de degré 1, nous appelons cette EDP linéaires. Egalement à remarquer que l'équation ne se mêle pas des $x's$, $y's$, ou le temps au sein d'un seul terme, dans cette équation nous n'avons pas des termes multiplicatifs, des divisions, ou fonctionnelle de l'équation entre les variables indépendantes, nous appelons cela la caractéristique de séparabilité de l' EDP. Ces deux propriétés, la linéarité et la séparabilité, rendent le problème beaucoup plus dociles que bien d'autres EDP ont rencontré en physique. Je vais essayer de vous guider à travers un procédé difficile, mais très puissant pour résoudre des équations aux dérivées partielles en utilisant la transformée de Fourier (TF). Beaucoup d'entre vous savent peut-être que le TF est utilisé dans l'analyse du signal et la manipulation, mais il a d'abord été utilisé par Fourier pour résoudre ce problème. Considérons les

relations intégrales suivante qui définissent le TF 2D en coordonnées cartésiennes. Nous allons appeler la fonction $\hat{\phi}$ le TF de notre fonction ϕ d'origine:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(k_x, k_y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \phi(x, y, t) dx dy \\ \phi(x, y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \hat{\phi}(k_x, k_y, t) dk_x dk_y.\end{aligned}$$

Avis de la symétrie dans la marche avant et en arrière dans la transformation. C'est parce que la commutation entre la forme normale du problème et ce que nous appelons l'espace de Fourier, où le problème existe après le TF, sont physiquement identiques d'après le théorème de Plancherel (voir [13]). Nous aurons besoin de plus fait bien connu de calcul, à savoir l'intégration par parties:

$$\int_a^b \phi dv = \phi v \Big|_a^b - \int_a^b v d\phi.$$

L'utilisation de ces faits, examinons les dérivées spatiales de l'équation de diffusion, où l'on considère les dérivées secondes à la fonction d'intérêt. Nous pouvons intégrer ces dérivées secondes par parties, l'identification de u et v comme suit:

$$\begin{aligned}\phi &= e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \text{ et } v = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ d\phi &= \frac{\partial}{\partial x} e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} dx \text{ et } dv = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx\end{aligned}$$

puis l'intégration par parties nous dit:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dy &= e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{-\infty(x,y)}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy \\ &= e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{-\infty(x,y)}^{\infty} + 2\pi i k_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy.\end{aligned}$$

Avis dans la première ligne nous avons effectivement «transférés» une dérivée de ϕ , et

la mettre sur l'exponentielle du TF, mais comme l'exponentielle est une fonction explicite, nous pouvons seulement effectuer les dérivés, nous donnant la constante sur la droite la plus intégrante de la deuxième ligne. Le premier terme se compose d'une fonction $f(x)$ oscillante avec le temps t . Mais si la fonction f est bornée $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, (comme n'importe quel signal physique doit être), alors le terme disparaît, ce qui élimine le terme de gauche de la deuxième ligne, et après nous écrivons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dy = 2\pi i k_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy.$$

Regarder le côté droit, il semble que nous prenons le TF d'une première dérivée de ϕ . Nous poursuivons cette intégrale de la même manière:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = \phi e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \Big|_{-\infty(x,y)}^{\infty} + 2\pi i k_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} dx dy.$$

Rappel, selon nos conditions aux limites, $\phi = 0$ à $|x| = |y| = \infty$, et nous avons:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = 2\pi i k_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} dx dy.$$

Enfin, nous pouvons dire que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dy &= (2\pi i k_x)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi \cdot e^{-i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} dx dy \\ &= (2\pi i k_x)^2 \hat{\phi}. \end{aligned}$$

En général, si vous avez continué la procédure ci-dessus, vous constaterez que:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \phi = (2\pi i k_x)^n \hat{\phi}.$$

Maintenant garder à l'esprit, nous avons pris le TF spatiale (c.-à-dire avec x et y), alors la dérivée en temps ne change pas en vertu d'un TF. Cela signifie que nous pouvons écrire l'équation de diffusion 2D après notre TF en tant que:

$$(2\pi)^2 \hat{\phi} \cdot (k_x^2 + k_y^2) + \frac{1}{D} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + D(2\pi)^2 (k_x^2 + k_y^2) \cdot \hat{\phi} = 0.$$

Incroyable! nous avons complètement éliminé de notre dépendance spatiale; cette équation reste une équation du premier ordre EDO dans le temps, avec la solution d'une séparation des variables:

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + D(2\pi)^2 (k_x^2 \cdot x + k_y^2 \cdot y) \cdot \hat{\phi} = 0 \rightarrow \hat{\phi} = A e^{-D(2\pi)^2 (k_x^2 + k_y^2) t}.$$

La constante A est appelée la normalisation; dans un instant nous allons l'utiliser pour faire une déclaration sur la conservation. D'accord, alors nous avons cette chose $\hat{\phi}$ bizarre, qu'est-ce que nous disent? rappelons nous que nous avons aussi un inverse TF, il a été la deuxième équation intégrale sous la définition de la TF. Ensuite, notre fonction d'origine, $\hat{\phi}$ est donnée par:

$$\phi = A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-D(2\pi)^2 (k_x^2 + k_y^2) t} \cdot e^{i2\pi(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} dk_x dk_y.$$

L'une des caractéristiques de l'équation de diffusion originale entre en jeu ici, l'intégrale entière est séparable par la variable spatiale:

$$\phi = A \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi k_x \cdot x - D(2\pi k_x)^2 t} dk_x \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi k_y \cdot y - D(2\pi k_y)^2 t} dk_y \right).$$

En général, le nombre de ces intégrales séparables est directement liée à la dimension de l'équation de diffusion; en trois dimensions il y aurait là comme des trois intégrales. Cette intégrale n'est pas triviale ... il faut compléter la place de l'exposant, mise à l'échelle de la variable d'intégration, et le changement de coordonnées polaires. Nous avons obtenu:

$$\phi(x, y, t) = A \frac{e^{\left(\frac{-(x^2 + y^2)}{4Dt}\right)}}{4\pi Dt}$$

nous y sommes presque! que dire de cette constante de normalisation A ? Nous imposons cette condition:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y, t) dx dy = 1$$

Lemme 1 (*L'intégrale de la solution fondamentale*). Pour chaque instant $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, t) dx = 1$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, t) dx = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx$$

$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz$$

$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2} dz_i = 1.$$

Dans ce cas, la résolution de l'équation ci-dessus pour A nous dit que $A = 1$, enfin à remarquer que $x^2 + y^2$ dans l'exposant est exactement r^2 en coordonnées polaires. Qui nous dit

$$\phi(r, t) = \frac{e^{-\left(\frac{r^2}{4Dt}\right)}}{4\pi Dt}$$

Définition 1 *la fonction*

$$\phi(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

est appelée la solution fondamentale de l'équation de la chaleur.

2.3.2 Un problème aux valeurs initiales

Nous considérons le problème de valeur initiale (ou de Cauchy)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Nous établissons la méthode de transformée de Fourier pour résoudre (2.16) en calculant \hat{u} , la transformée de Fourier de u dans les variables spatiales x seulement. Ainsi

$$\begin{cases} \hat{u}_t + |y|^2 \hat{u} = 0 & \text{pour } t > 0 \\ \hat{u} = \hat{g} & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

où

$$\hat{u} = e^{-t|y|^2} \hat{g}$$

par conséquent, $u = (e^{-t|y|^2} \hat{g})^\checkmark$ et donc

$$u = \frac{g * f}{(2\pi)^{n/2}} \quad (2.17)$$

où $f = e^{-|y|^2}$.

Maintenant, si $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$, et nous posons $z = b^{1/2}x - \frac{a}{2b^{1/2}}i$, on trouve

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax-bx^2} dx = \frac{e^{-a^2/4b}}{b^{1/2}} \int_{\Gamma} e^{-z^2} dz,$$

Γ désignant le contour $\left\{ \text{Im}(z) = -\frac{a}{b^{1/2}} \right\}$ dans le plan complexe. Γ Déformation dans l'axe réel, nous calculons $\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \pi^{1/2}$, et donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax-bx^2} dx = e^{-a^2/4b} \left(\frac{\pi}{b} \right)^{1/2}.$$

ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x \cdot y - t|y|^2} dy = \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_j y_j - t y_j^2} dy_j = \left(\frac{\pi}{t} \right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (2.18)$$

mais alors

$$f = (e^{-t|y|^2})^\checkmark = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy - t|y|^2} dy = \frac{1}{(2t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (2.19)$$

par (2.18) impliquant (2.17), nous calculons

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0). \quad (2.20)$$

La transformée de Fourier nous a fourni une nouvelle dérivation de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur.

Théorème 7 (*La solution du problème aux valeurs initiales*)

Assumons $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et définir u par (2.20) donc

- (i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$;
- (ii) $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$,

et

- (iii) $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = g(x^0)$ pour chaque point $x^0 \in \mathbb{R}^n$

Preuve 5

- (1) Puisque la fonction $\frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ est infiniment différentiable avec des dérivées uniformément bornées de tous ordres dans $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty]$ pour chaque $\delta > 0$, nous voyons que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$. En outre

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} [(\phi_t - \Delta_x \phi)(x - y, t)] g(y) dy \\ &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \end{aligned}$$

depuis ϕ se résout l'équation de la chaleur.

- (2) Fixons $x^0 \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$ choisissons $\delta > 0$ tel que

$$|g(y) - g(x^0)| < \varepsilon \text{ si } |y - x^0| < \delta, y \in \mathbb{R}^n \quad (2.21)$$

alors, si $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$ nous avons, d'après le lemme

$$\begin{aligned}
|u(x, t) - g(x^0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - y, t) [g(y) - g(x^0)] dy \right| \\
&\leq \int_{B(x^0, \delta)} \phi(x - y, t) |g(y) - g(x^0)| dy + \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} \phi(x - y, t) |g(y) - g(x^0)| dy \\
&= I + J
\end{aligned}$$

maintenant

$$I \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - y, t) dy = \varepsilon,$$

due à (2.21) et le lemme. En outre, si $|x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}$ et $|y - x^0| \geq \delta$

$$|y - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2} |y - x^0|$$

donc $|y - x| \geq \frac{1}{2} |y - x^0|$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
J &\leq 2 \|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} \phi(x - y, t) dy \\
&\leq \frac{c}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \\
&\leq \frac{c}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}} dy \\
&\leq \frac{c}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr \rightarrow 0 \text{ comme } t \rightarrow 0^+
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$ et $t > 0$ est assez petit, $|u(x, t) - g(x^0)| < 2\varepsilon$.

2.3.3 Propriétés des solutions

Théorème 8 (*Le principe du maximum fort pour l'équation de la chaleur*)

Supposons $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\bar{U}_T)$ résout l'équation de la chaleur dans U_T

(i) Alors

$$\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$$

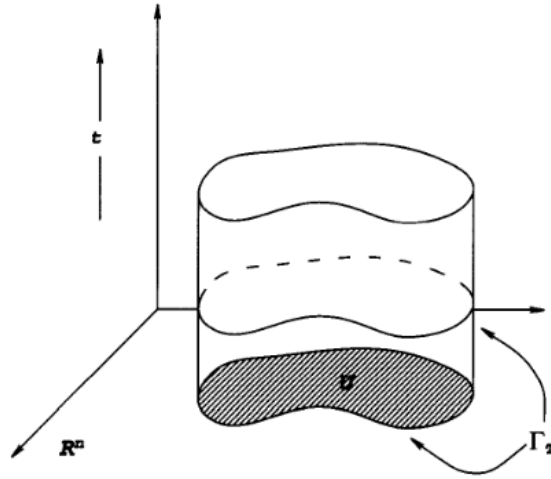


Figure 2-7: Principe du maximum fort pour l'équation de la chaleur.

(ii) En outre, si U est connexe et il existe un point $(x_0, t_0) \in U_\Gamma$ tel que

$$u(x_0, t_0) = \max_{\bar{u}_\Gamma} u$$

Alors

$$u \text{ is constant in } \bar{U}_{t_0}$$

L'assertion(i) est le principe du maximum pour l'équation de la chaleur et (ii) est le principe du maximum fort. Affirmations similaires sont valables avec "min" remplaçant "max".

Si u atteint son maximum(ou minimum)à un point intérieur, alors u est constante en tout temps plus tôt.

Théorème 9 (Le principe du maximum pour le problème de Cauchy)

Supposons $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ résout

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (2.22)$$

et répond à l'estimation de croissance

$$u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T) \quad (2.23)$$

pour constantes $A, a > 0$ alors

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

Le principe du maximum et l'unicité

Nous utilisons maintenant le principe du maximum prouvé ci-dessus pour prouver l'unicité des solutions à l'équation de la chaleur.

Théorème 10 (*L'unicité pour le problème de Cauchy*)

Soit $g \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ alors il existe au plus une solution $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ du problème de valeur initiale.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u = g & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.24)$$

Satisfaire les estimations de la croissance

$$|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2} \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T) \quad (2.25)$$

pour les constantes $A, a > 0$

Preuve 6

Supposons qu'il existe deux solutions u et v . Soit $w = u - v$, donc w est une solution de

$$\begin{cases} w_t - k\Delta w = 0 & x \in \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ w = 0 & x \in \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Nous notons $\Omega = \mathbb{R}^n \times (0, T)$ et $\Gamma_T = \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$.

Par le principe du maximum faible

$$\max_{\Omega_T} w(x, t) = \max_{\Gamma_T} w(x, t) = 0$$

Par conséquent $w(x, t) \leq 0$ dans Ω_T , ce qui implique $u(x, t) \leq v(x, t)$ dans Ω_T .

Ensuite, soit $\tilde{w} = v - u$ par conséquent \tilde{w} est aussi une solution de l'équation ci-dessus et par le principe du maximum faible.

$$\max_{\Omega_T} \tilde{w}(x, t) = \max_{\Gamma_T} \tilde{w}(x, t) = 0$$

Par conséquent $\tilde{w}(x, t) \leq 0$ dans Ω_T , ce qui implique $v(x, t) \leq u(x, t)$ dans Ω_T , donc, nous avons

$$\begin{aligned} u(x, t) &\leq v(x, t) & (x, t) \in \bar{\Omega}_T \\ v(x, t) &\leq u(x, t) & (x, t) \in \bar{\Omega}_T \end{aligned}$$

Par conséquent $\tilde{w}(x, t) \leq 0$ dans Ω_T , nous concluons que $u = v$ dans $\bar{\Omega}_T$ comme vous le souhaitez.

Chapitre 3

Amélioration de l'image

3.1 Qu'est-ce qu'une image?

Une image numérique peut être considérée comme une représentation discrète de données possédant à la fois spatiale (aménagement) et l'intensité (couleur), nous pouvons aussi envisager de traiter une image en tant que signal multidimensionnel.

L'image numérique discrète $I(m, n)$ représente la réponse de certains capteurs (ou tout simplement une valeur de certains intérêts) à une série de positions fixes ($m = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N$) en coordonnées cartésiennes et est dérivé du signal $2 - D$ spatiale continue $I(x, y)$ à travers un processus d'échantillonnage souvent appelé discrétisation.

Les éléments d'image individuels ou pixels de l'image sont donc appelés par leur $2 - D(m, n)$ indice. En utilisant la convention de matlab $I(m, n)$ désigne la réponse du pixel situé à la m ème ligne et n ème colonne à partir d'une image d'origine en commençant haut à gauche (voir figure 3.1).

Bien que les images que nous considérons dans ce mémoire seront discrètes, il est souvent commode de traiter théoriquement une image comme un signal spatiale continu: $I(x, y)$, en particulier ce qui permet parfois nous faire un usage plus naturel des techniques puissantes de l'intégrale et le calcul différentiel de comprendre les propriétés de l'image et à manipuler et traiter ensuite efficacement. Généralement l'analyse mathématique de l'image discrète.

Au long de ce mémoire, nous considérons habituellement une image $2 - D$.

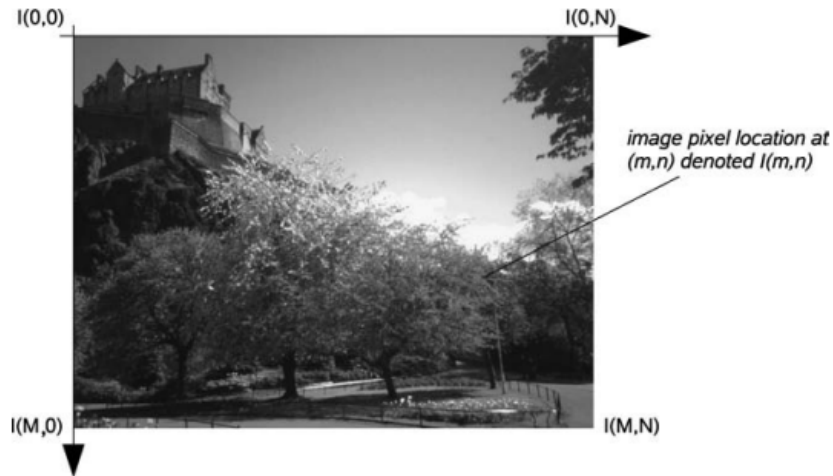


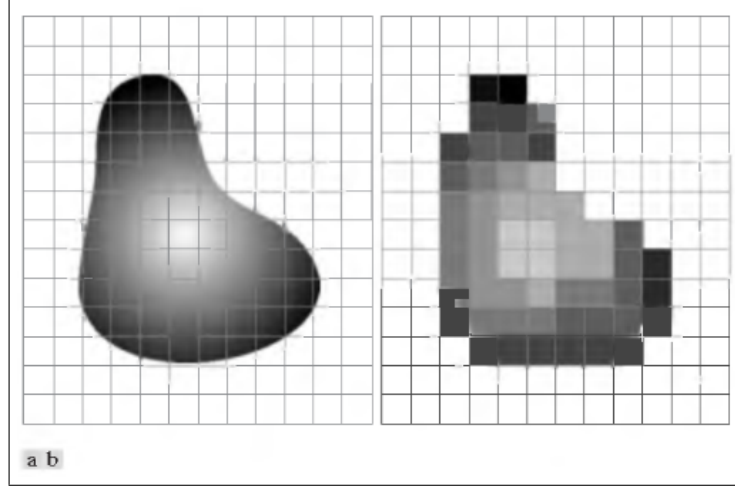
Figure 3-1: Espace de coordonnées cartésiennes 2-D d'une image numérique $M \times N$.

3.2 Echantillonnage et quantification

De la discussion dans la section précédente, nous voyons qu'il existe de nombreuses façons d'acquérir des images, mais notre objectif à tous est le même pour générer des images numériques à partir de données détectées. La mise hors de la plupart des capteurs est une tension continue dont l'amplitude et le comportement spatial sont liées au phénomène physique détecté. Pour créer une image numérique, nous avons besoin de convertir les données détectées continue sous forme numérique, cela implique deux traités: l'échantillonnage et quantification.

3.2.1 Les concepts de base de l'échantillonnage et la quantification

L'idée de base d'échantillonnage et de quantification est illustrée à la figure (ab): (a) montre une image continue, $f(x, y)$, que nous voulons convertir au format numérique. Une image peut être continue en ce qui concerne les coordonnées x et y et en amplitude. Pour la convertir en numérique, nous devons échantillonner la fonction dans les deux directions et en amplitude. La numérisation des valeurs de coordonnées est appelée échantillonnage. La numérisation des valeurs d'amplitude est appelée la fonction de quantification représentée sur la figure (ab).



(a) Image continue projetée sur réseau de capteurs. (b) Résultat de l'échantillonnage et la quantification d'image.

3.2.2 La représentation des images numériques

La suite de l'échantillonnage et la quantification est une matrice de nombres réels. Nous allons utiliser deux façons principales de ce mémoire pour représenter des images numériques. Supposons que l'image $f(x, y)$ est échantillonnée afin que l'image numérique qui en résulte à M lignes et N colonnes. Les valeurs des coordonnées (x, y) deviennent alors des quantités discrètes pour plus de clarté et de commodité de notation, nous allons utilisé des valeurs entières de ces coordonnées discrètes. Ainsi, les valeurs des coordonnées à l'origine sont $(x, y) = (0, 0)$ de la prochaine valeurs des coordonnées sur la première ligne de l'image sont représentées par $(x, y) = (0, 1)$. Il est important de garder à l'esprit que la notation $(0, 1)$ utilisée pour désigner le second échantillon le long de la première rangée. Ca ne veut pas dire que ce sont les valeurs réelles actuelles de la convention de coordonnée physiques utilisées dans ce mémoire.

Les notations introduites dans le paragraphe précédent nous permettent d'écrire une image numérique complète $M \times N$ dans le formulaire ci-dessous une matrice compacte:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \cdots & f(0, N - 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \cdots & f(1, N - 1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(M - 1, 0) & f(M - 1, 1) & \cdots & f(M - 1, N - 1) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Le côté droit de cette équation est par définition une image numérique. Chaque élément

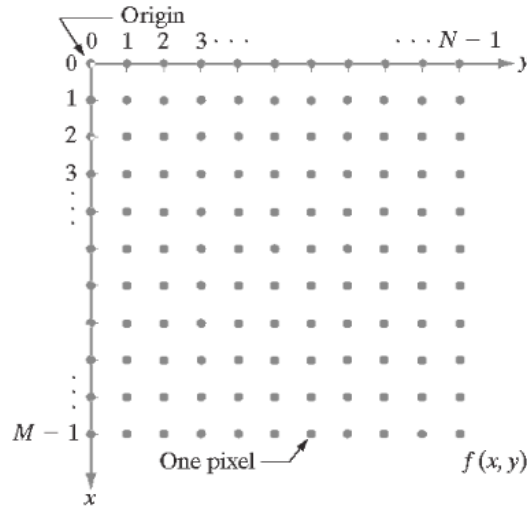


Figure 3-2: Convention de coordonnées utilisés dans ce mémoire pour représenter des images numériques.

de ce tableau matricielle appelé un élément, élément d'image, pixel, ou pel. Les termes pixels et image seront utilisés tout au long de la prochaine de nos discussions pour désigner une image numérique et ses éléments.

Dans certaines discussions, il est avantageux d'utiliser une notation matricielle plus traditionnelle pour désigner une image numérique et ses éléments.

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,N-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{M-1,0} & a_{M-1,1} & \cdots & a_{M-1,N-1} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Clairement $a_{ij} = f(x = i, y = j) = f(i, j)$ de sorte que les équations (3.1) et (3.2) sont identiques.

Exprimant l'échantillonnage et la quantification dans des termes mathématiques plus formels peuvent être utiles à certains moments. Soient Z et R désignent l'ensemble des entiers réels et l'ensemble des nombres réels, respectivement. Le processus d'échantillonnage peut être considéré partitionnement le plan xy dans une grille comportant les coordonnées du centre de chaque

grille étant une paire d'éléments (Z_i, Z_j) avec Z_i et Z_j étant des nombres réels de Z donc $f(x, y)$ est une image numérique si (x, y) sont des entiers de Z^2 et f est une fonction qui assigne une valeur de niveau de gris (qui est, un nombre réel de l'ensemble des nombres réels, R) pour chaque paire distincte de coordonnées (x, y) cette affectation fonctionnelle est évidemment le processus de quantification décrite plus tôt si les niveaux de gris sont également des nombres entiers (comme c'est habituellement le cas dans ce chapitre), Z remplace R , et un appareil photo numérique l'image devient alors une fonction $2 - D$ dont les coordonnées et les valeurs d'amplitude sont des nombres entiers.

3.3 Le voisinage d'un pixel

Une mesure importante dans les images est le concept de la connectivité. De nombreuses opérations de traitement de l'image utilisent le concept d'un voisinage locale d'une image pour définir une zone d'influence locale, la pertinence ou l'intérêt. Le thème centrale de la définition du voisinage est la notion de connectivité de pixels, c'est à dire décider quels pixels sont connectés les uns aux autres. Quand on parle de 4-connectivités, seuls les pixels qui sont N, W, E, S du pixel donné sont connectés. Toutefois, les pixels sur les diagonales doivent également être pris en considération, alors nous avons 8- connectivités (c-à-dire $N, NW, W, NE, SE, E, SW, S$ sont tous reliés voir figure 3-3).

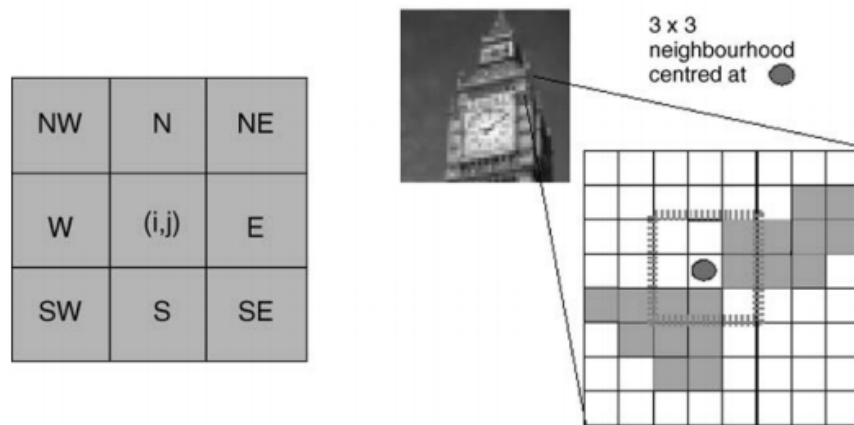


Figure 3-3: Connectivité de voisinage de l'image (à gauche) et exemple de voisinage 3×3 centré à un emplacement de pixel spécifique de l'image.

La majorité des techniques de traitement d'image utilisent 8-connectivité par défaut, qui, pour une taille raisonnable de voisinage est souvent réalisables en temps réel sur des processeurs modernes pour la majorité des opérations. Opérations de filtrage sur une image entière sont généralement réalisées en série d'opérations de voisinage en utilisant un principe de sliding-window-based, i.e. Chaque pixel de l'image est traité sur la base d'une opération effectuée sur son voisinage de pixels $N \times N$ (région d'influence).

3.4 L'importance et le sens de la convolution

Il serait difficile d'exagérer l'importance de la convolution de l'imagerie. Il y a deux raisons principales:

- (1) Un très grand nombre de processus de formation de l'image (et en fait, les procédures de mesure en général) sont bien décrites par le processus de convolution. En fait, si un système est à la fois linéaire et invariant par changement de position, puis la formation de l'image est nécessairement décrite par convolution.
- (2) Le théorème de convolution (dont nous parlerons bientôt) nous permet de visualiser et de comprendre le processus de convolution dans le domaine des fréquences spatiales. Cette formulation équivalente dans le domaine fréquentiel fournit un cadre mathématiques très puissant pour approfondir la compréhension de la formation d'image et de traitement.

Tout d'abord, essayons de comprendre le mécanisme du processus de convolution. Une intégrale de convolution est un type de "overlap" intégrante, et la figure 3-4 donne une représentation graphique de la façon dont la convolution se produit et calculée. Fondamentalement, une version inversée de l'une des fonctions est systématiquement déplacées et l'intégrale de leur produit (la zone de chevauchement) est calculée à chaque changement de position. Toutes ces coordonnées pour lesquelles la zone de chevauchement est différent de zéro définit le rang de convolution.

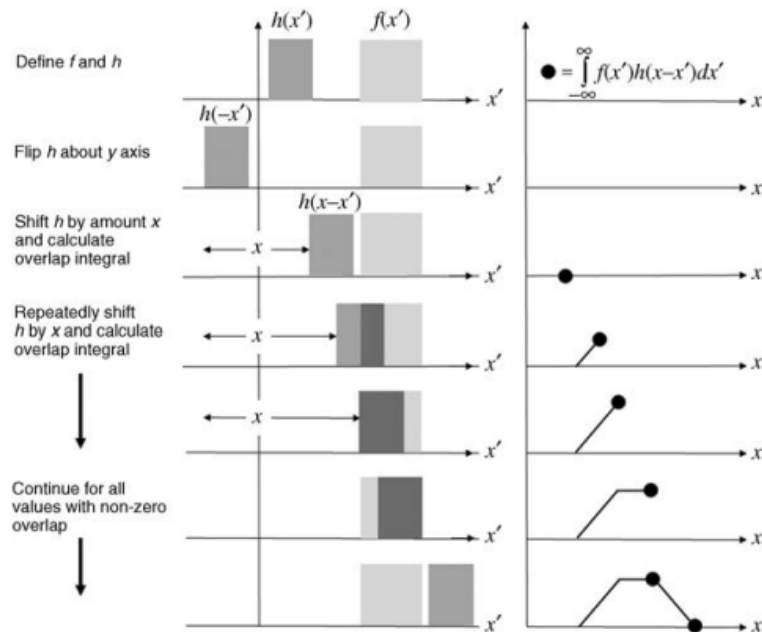


Figure 3-4: Le calcul d'une convolution 1-D intégrante.

3.4.1 Convolution numérique

En traitement d'images numériques, les signaux sont discrets pas continue. Dans ces conditions la convolution de deux fonctions est obtenue en discrétisant l'intégrale de convolution. Dans le cas simple 1-D cela devient

$$g_j = \sum_i f_i h_j \quad (3.3)$$

où les indices j et i correspondant sont des valeurs discrètes de x et x' respectivement. En deux dimensions, la convolution discrète intégrante peut être écrite comme

$$g_{kl} = \sum_j \sum_i f_{ij} h_k \quad i, l, j \quad (3.4)$$

où les indices k et l correspondent à x et y et i et j correspondent à x' et y' . Cette équation dément un peu la simplicité du mécanisme impliqué. Le filtre de noyau h est seulement différent de zéro lorsque les changement de deux coordonnées $k - i$ et $l - j$ sont assez petites pour se

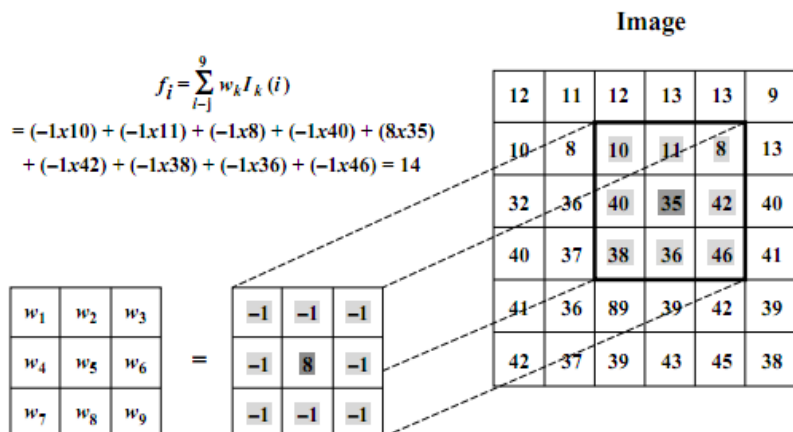


Figure 3-5: Convolution discrètes. Le pixel central du noyau et le pixel cible dans l'image sont indiqués par l'ombrage foncé. Le noyau est "collée" sur l'image afin que le centre de pixels et la cible coïncident. La valeur filtrée du pixel cible est alors donnée par une combinaison linéaire des pixels de voisinage, les poids spécifiques étant déterminées par les valeurs du noyau. Dans ce cas précis la cible de la valeur initiale 35 a comme valeur filtrée de 14.

situent à l'intérieure l'étendue spatiale de h (i.e. Sont non nuls).

3.5 Les méthodes à base d' EDP

3.5.1 Le lissage des équations aux dérivées partielles

L'équation de la chaleur

L'équation la plus ancienne et la plus étudiée dans le traitement de l'image est probablement l'équation de la chaleur paraboliques linéaires:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(t, x) = 0 & t \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (3.5)$$

Notez que nous avons ici $x \in \mathbb{R}^2$. En fait, nous considérons que $u_0(x)$ est défini, en premier $[0, 1]^2$ carrés. Par symétrie, nous l'étendre à $C = [-1, +1]^2$, puis dans l'ensemble de \mathbb{R}^2 par périodicité (voir figure 3-6). Cette moyens d'étendre $u_0(x)$ est classique en traitement d'images. La motivation sera plus claire dans la suite. Si $u_0(x)$ prolongée de cette manière satisfait en outre $\int_C |u_0(x)| dx < +\infty$, nous dirons que $u_0 \in L^1_{\#}(C)$.

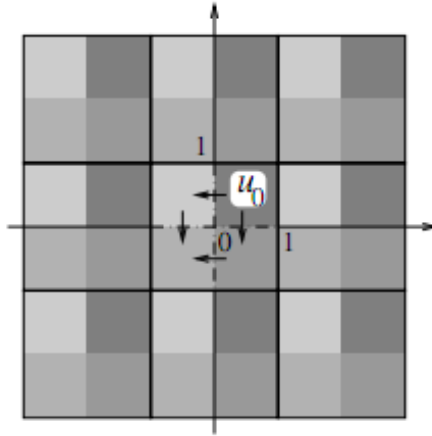


Figure 3-6: Extension de u_0 principalement définie sur $[0, 1]^2$ à \mathbb{R}^2 par symétrie et la périodicité.

La motivation pour introduire une telle équation est venue de la remarque suivante: la résolution de (3.5) est équivalente à la réalisation d'un filtrage Gaussien linéaire, qui a été largement utilisé en traitement du signal. Plus précisément, soit u_0 être dans $L^1_{\#}(C)$. Ensuite, la solution explicite de (3.5) est donnée par

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} G_{\sqrt{2t}}(x - y)u_0(y)dy = (G_{\sqrt{2t}} * u_0)(x),$$

où $G_{\sigma}(x)$ représente le noyau Gaussien à deux dimensions

$$G_{\sigma}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right).$$

La convolution par un noyau positif est le fonctionnement de base à l'image de filtrage linéaire. Il correspond au filtrage passe-bas. Cette formule donne la correspondance entre les temps t et le paramètre d'échelle σ du noyau Gaussien.

L'action du noyau Gaussien peut aussi être interprété dans le domaine fréquentiel. Nous allons définir la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}[f](w) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \exp(-iw \cdot x) dx,$$

où $w \in \mathbb{R}^2$. Il est bien connu que

$$\mathcal{F}[G_\sigma * f](w) = \mathcal{F}[G_\sigma](w)\mathcal{F}[f](w),$$

et depuis

$$\mathcal{F}[G_\sigma](w) = \exp\left(-\frac{|w|^2}{2/\sigma^2}\right),$$

il s'ensuit que

$$\mathcal{F}[G_\sigma * f](w) = \exp\left(-\frac{|w|^2}{2/\sigma^2}\right)\mathcal{F}[f](w),$$

à savoir, la convolution par une Gaussienne est un filtre passe-bas qui empêche les hautes fréquences (oscillations dans le domaine spatial).

3.6 Le filtrage Gaussien

Le filtre gaussien est une question très importante tant pour des raisons théoriques et pratiques. Ici, nous filtrons l'image en utilisant un noyau discret dérivés d'une forme à symétrie radiale de la fonction Gaussienne continue 2-D définis comme suit:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

Les approximations discrètes à cette fonction continue sont spécifiées en utilisant deux paramètres libres:

- (1) la taille désirée du noyau (comme un masque $N \times N$ filtre);
- (2) la valeur de σ , l'écart type de la gaussienne.

Voici quelques exemples de filtres discrets Gaussien, avec plus ou moins du noyau et de tailles écart-type, sont présentés dans la figure 3 – 7.

L'application de filtre gaussien a pour effet de lissage de l'image, mais il est utilisé dans l'écart qui est quelque peu différente de filtre moyennneur. Premièrement, le degré de lissage est contrôlé par le choix du standard σ paramètre de déviation, et non par la valeur absolue

de la taille du noyau (qui est le cas avec le filtre moyeneur). Deuxièmement, la fonction de Gauss a une propriété assez particulière, à savoir que sa transformée de Fourier est également une fonction Gaussienne, ce qui le rend très pratique pour l'analyse du domaine fréquentiel de filtres.

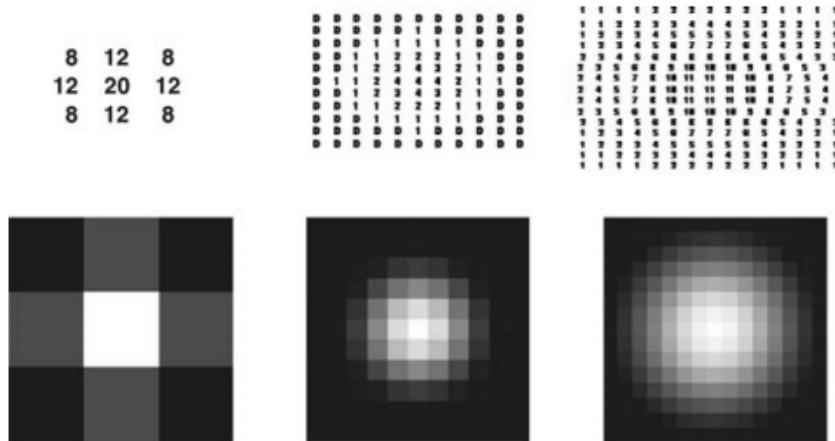


Figure 3-7: Noyaux de filtre Gaussien $3 \times 3\sigma = 1$, $11 \times 11\sigma = 2$ et $21 \times 21\sigma = 4$ (les valeurs numériques sont non normalisée).

Nous pouvons appliquer le filtre gaussien dans Matlab. Dans tous les cas, l'effet de lissage est de dégrader les hautes fréquences (bord) détail attendu (par exemple figure 3 – 8 a), mais il élimine aussi dans une certaine mesure le bruit présent dans les deux figure 3 – 8 b et c.

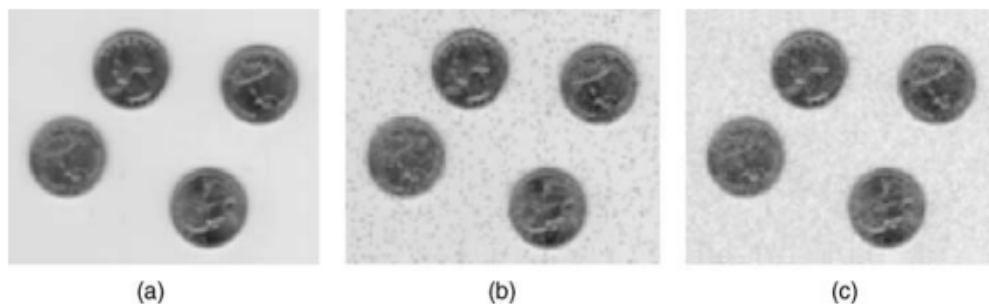


Figure 3-8: Un filtre gaussien (5×5 avec $\sigma = 2$) appliqué à (a) l'image originale (b) de bruit sel et poivre et (c) images de bruit Gaussien de la figures 4.9.

3.7 Un exemple local

Le lissage d'image est une opération importante en traitement d'images, utilisée pour atténuer un bruit qui corrompt l'information. Cette opération consiste le plus souvent à appliquer à l'image un filtre linéaire passe-bas (filtre Gaussien) numérique.

Voici une image de la faculté de Mathématiques et Informatique de l'université de M'sila.



Figure 3-9 Image de la faculté MI avec un bruit Gaussien



Figure 3-10 Image de la faculté MI filtrée par un noyau de Gauss

3.8 Le traitement d'image Dans Matlab

Après avoir présenté les bases de la représentation de l'image, nous passons maintenant à l'aspect pratique de cette mémoire pour enquêter sur les étapes initiales de la manipulation d'images sous Matlab.

```
I=imread('C:\Users\Walid\Documents\MATLAB\facmi.jpg');
figure;
J = imnoise(I,'salt & pepper',0.03);
imshow(J);
A = fspecial('gaussian', [5 5],5);
W = imfilter(J,A);
figure;
imshow(W);
A = fspecial('gaussian', [7 7],8);
W = imfilter(J,A);
figure;
imshow(W);
A = fspecial('gaussian', [9 9],12);
W = imfilter(J,A);
figure;
imshow(W);A = fspecial('gaussian', [9 9],15);
W = imfilter(J,A);
figure;
imshow(W);
```

Annexe A.

Table des transformées de Fourier

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-iwx} dw$	$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iwx} dx$
$\begin{cases} 1 & \text{si } x < a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin aw}{w}$
$\begin{cases} 1 & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$	$i(e^{-ibw} - e^{iaw})$
$\begin{cases} 1 - \frac{ x }{a} & \text{si } x < a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases} \quad a > 0$	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^2(\frac{aw}{2})}{aw^2}$
$\begin{cases} x & \text{si } x < a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases} \quad a > 0$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{aw \cos(aw) - \sin(aw)}{w^2}$
$\begin{cases} \sin x & \text{si } x < \pi \\ 0 & \text{si } x > \pi \end{cases}$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\pi w)}{w^2 - 1}$
$\begin{cases} \sin(ax) & \text{si } x < b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases} \quad a, b > 0$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w \cos(bw) \sin(ab) - a \cos(ab) \sin(bw)}{w^2 - a^2}$

Bibliographie

- [1] Rafael C.Gonzalez et Richard E.Woods,Digital Image Processing Second Edition, Prentice Hall (2002).
- [2] Gilles Aubert et Pierre Kornprobst, Mathematical Problems In Image Processing ,Partial Differential Equations and the Calculus of variations, Applied Mathematical science 147,spinger,2006.
- [3] Nakhlé H.Asmar ,Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundry Values problems ,Prentice Hall,2005.
- [4] Lawrence C.Evans, Graduate Studies In Mathematics volume 19, Americam Mathematical Society, 1997.
- [5] Chris Solomon et Toby Breckon, Fundamentals of Digital Image Processing, A practical Approach with Examples In Matlab, Wiley-Blackwell, 2011.
- [6] Joachim Weickert,Anisotropic Diffusion in Image Processing, B.G. Teubner Stuttgart 1998.
- [7] K.T.Tang, Mathematical Methods for Engineers and Scientists 3, Fourier Analysis, Partial Differential Equations and Variational Methods, Springer 2007.
- [8] Yves Leroyer et Patrice Tesson, Mathématique pour L'ingénieur, Dunod (2009).
- [9] Walter A.Strauss, Partial Differential Equations an Introduction, John Wiley & Sons, Inc, 1992.
- [10] Andrei D. Polyanin, Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists, Chapman & Hall/Crc, 2002.

- [11] G.Evans,J Blackledge and P.Yardley, Analytic Methods for Partial Differential Equations, Springer, 1999.
- [12] Ronald N.Bracewell, The Fourier Transform and Its Applications, Mc Graw-Hill, 2000.
- [13] Walter Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill Book Company, 1973.

Résumé

Le débruitage vise à supprimer autant que possible le bruit qui perturbe le signal ou l'image. C'est ce qui explique le bruit pour les imperfections de mesure (capteurs de mauvaises qualités, bruit de quantification, etc).

Dans ce mémoire, nous utilisons une simple confusion c'est de supprimer les fréquences élevées causées par le bruit en utilisant l'équation de la chaleur. Nous allons voir les limites des méthodes linéaires.

Mots clé : équation de la chaleur, traitement d'image, transformée de Fourier.

Abstract

Denoising is to remove as much as possible the noise that disturbs the signal or image. This accounts for the noise measurement imperfections (poor quality sensors, quantization noise, etc.). In this paper, we use a simple confusion is to remove high frequency noise caused by using the heat equation. We'll see the limitations of linear methods.

Key words : heat equation, image processing, Fourier transform.

ملخص

تقليل الضوضاء هو إزالة أكبر قدر ممكن من الضجيج الذي يزعج إشارة أو صورة. وهذا يفسر لعيوب أجهزة قياس الضوضاء (أجهزة الاستشعار ذات نوعية رديئة). في هذا العمل، سنستخدم خلط بسيط و هو إزالة الضوضاء عالية التردد باستعمال معادلة انتشار الحرارة. وسنتطرق إلى محدودية الطرق الخطية.

كلمات مفتاحية: معادلة انتشار الحرارة – معالجة الصور - تحويل فورييه.