

# MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Analyse Mathématique et Numérique

**Par**

BEKKA Amina

**Sujet**

## Calcul numérique des dérivées fractionnaires

Date de soutenance :

**Devant le jury :**

Mr. DILMI Mustapha	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. NADIR Mostefa	Prof. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. KHIRANI Amina	Prof. Univ de M'sila	Examineur

**Promotion : 2017 / 2018**

# *Dédicace*

*Ce travail est dédié à:*

*Mes parents*

*Mes frères*

*Toute la famille*

*Mes amies*

# *Remerciements*

*J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage pour achever ce travail.*

*Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur le Professeur M.NADIR qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et de m'a voir guidé.*

*Leurs critiques et Leurs conseils m'ont été très précieux,*

*De même je remercie Mrs M.DILMI et Mdm A.KHIRANI qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>2</b>
1.1 Intégrale Simple . . . . .	2
1.1.1 Propriétés usuelles de l'intégrale . . . . .	2
1.1.2 Fonctions définies par des intégrales . . . . .	3
1.2 Théorème du point fixe de Banach . . . . .	4
1.3 Les équations intégrales . . . . .	4
1.3.1 Equation intégrale de Volterra . . . . .	4
1.4 Equation différentielle . . . . .	5
1.4.1 Order d'équation différentielle . . . . .	5
1.4.2 Forme normale d'une équation différentielle . . . . .	6
1.4.3 Equation linéaire du premier ordre . . . . .	6
1.5 Le problème de Cauchy . . . . .	6
<b>2 Eléments de Calcul Fractionnaire</b>	<b>8</b>
2.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire . . . . .	8
2.1.1 Fonction Gamma d'Euler . . . . .	8
2.1.2 Fonction Bêta . . . . .	12
2.2 Intégrale et Dérivée Fractionnaire . . . . .	14
2.2.1 Intégrale Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	14
2.2.2 Dérivée Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	16
2.3 Intégrale d'ordre un demi d'une fonction causale . . . . .	18

2.4	Demi-dérivée de Riemann-Liouville . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Equations Différentielles fractionnaires</b>	<b>19</b>
3.1	Equivalence entre le problème de Cauchy et l'équation intégrale du type de Volterra . . . . .	20
3.2	Existence et unicité de la solution pour le problème de Cauchy . . . . .	21
	<b>Conclusion</b>	<b>24</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>25</b>

# Introduction

Le but du calcul fractionnaire est de généraliser les dérivées des ordres entiers (classiques) à des ordres non-entiers.

La théorie des dérivées de l'ordre non-entier ne soit pas nouveau, ces origines remontent à la fin du 17<sup>me</sup> siècle, le moment où Newton et Leibniz ont développé les fondements du différentiel calcul intégral. Leibniz a introduit le symbole  $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$  pour désigner la  $n^{\text{ième}}$  dérivée d'une fonction  $f$ . Quand il a signalé cela dans une lettre à l'Hôpital, qui posa la question si  $n = \frac{1}{2}$ ?, Leibniz réponds qu'il s'agit là d'un paradoxe, mais qu'un jour.

les avantages des dérivés fractionnaires deviennent apparents dans la modélisation des propriétés mécaniques et électriques des matériaux réels et dans de nombreux autres domaines.

Ce mémoire décompose en trois chapitres de la manière suivante

Dans le **premier chapitre**, nous présentons les notions préliminaires utiles, qui sont utilisées dans les autres chapitres. nous donnons un rappel de l'intégrale. Puis nous présentons le théorème du point fixe de Bannach, équation intégrale, équation différentielle et le problème de Cauchy.

Dans le **deuxième chapitre**, nous commençons par présenter quelques fonctions spéciales de la théorie des équations différentielles fractionnaires, et on définit l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire et leurs propriétés.

Le **troisième chapitre** sera consacré à la résolution du problème de Cauchy pour une équation différentielle fractionnaire dans le cas de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville. on réduit ce problème à une équation intégrale non linéaire de Volterra dans l'espace des fonctions sommables et on montre l'existence et l'unicité du solution.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Intégrale Simple

**Définition 1.1.1** Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $F$  une de ces primitives, et  $a, b$  deux points de  $I$ .

La quantité  $F(b) - F(a)$  est appelée intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est notée  $\int_a^b f(x) dx$  est la somme de ces aires algébriques quand  $x$  varie de  $a$  à  $b$ .

Pour calculer  $\int_a^b f(x) dx$ , regardons dans l'ordre si nous avons

- Une intégration directe .
- Intégrale par partie

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx.$$

- Un changement de variable.

#### 1.1.1 Propriétés usuelles de l'intégrale

- **Linéarité:** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un segment  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  deux nombres réels ou même complexes. Alors

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

- **Positivité et croissance.** Si  $f$  est une fonction continue et positive sur  $[a, b]$  (où encore à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ ), alors  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telles que pour tout  $x$  de  $[a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

### 1.1.2 Fonctions définies par des intégrales

1. La fonction  $\psi(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,

La fonction  $f$  est intégrable sur un domaine  $D$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $a$  est un nombre fixé de  $D$ . La fonction  $\psi$  est continue et dérivable si  $f$  est continue.

2. La fonction  $\psi(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ ,

Cette fonction est définie sur tout domaine  $D$  tel que pour tout  $(x, t)$  de  $D \times [a, b]$ ,  $f(x, t)$ . Elle est continue, dérivable et intégrable sur  $D$ .

\* La dérivée de  $\psi$  est donnée par la formule

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

\*S'intégrale est définie par le théorème de Fubini.

**Théorème 1.1.1 (Fubini)** Soit  $f \in L^1([a, b] \times [c, d])$  une fonction mesurable. Alors

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, t) dt \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, t) dx \right) dt.$$

3. La fonction  $\psi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt$ ,

Cette fonction est définie sur un domaine  $D$ . On suppose que  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  dérivables sur  $D$ .

La dérivée de  $\psi$  définit comme suite

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f(x, \beta(x)) \beta'(x) - f(x, \alpha(x)) \alpha'(x).$$

## 1.2 Théorème du point fixe de Banach

Ce Théorème est la base de la théorie du point fixe. Ce principe assure l'existence d'un unique point fixe par l'application contractante.

### Définition 1.2.2

Soit  $A$  un opérateur borné défini sur l'espace de Banach  $E$  dans lui-même, l'opérateur  $A$  est dit opérateur contractant, s'il existe une constante positive  $k$  telle que  $0 < k < 1$  et

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq k\|\varphi_1 - \varphi_2\|, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in E.$$

**Théorème 1.2.2** Soit  $A$  un opérateur contractant dans un espace de Banach  $E$ . Alors  $A$  admet un point fixe unique  $\varphi$  dans  $E$

$$A\varphi = \varphi.$$

## 1.3 Les équations intégrales

### Définition 1.3.3

On appelle équation intégrale toute équation de la forme

$$\int_F K(x, t, \varphi(t)) dt = \lambda\varphi(x) + f(x), \quad x \in F. \quad (1.1)$$

Où  $F$  est un espace mesuré,  $f(x)$  fonction mesurable donnée sur  $F$ ,  $\lambda$  un scalaire donnée qui peut être réel ou complexe et  $K(x, t, \varphi(t))$  une fonction mesurable sur  $F \times F$  appelée noyau de l'équation intégrale.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction  $\varphi$  satisfait l'équation (1.1).

### 1.3.1 Equation intégrale de Volterra

L'équation intéressée dans la suite de ce mémoire est une équation de Volterra.

### Définition 1.3.4

1- On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

2- On appelle équation intégrale non-linéaire de Volterra de seconde espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt = f(x).$$

## 1.4 Equation différentielle

### Définition 1.4.5

On appelle équation différentielle une équation établissant une relation entre la variable indépendante  $t$  et la fonction inconnue  $y = \varphi(t)$  et ses dérivées  $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$  symbolique, une équation différentielle est représentée comme suit :

$$F(t, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.2)$$

Si la fonction  $y = \varphi(t)$  est d'une seule variable indépendante, l'équation différentielle (1.2) est dite ordinaire.

### 1.4.1 Order d'équation différentielle

#### Définition 1.4.6

On appelle ordre d'une équation différentielle l'ordre le plus élevé de la dérivée dans cette équation.

#### Equation différentielle de premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est de la forme:

$$F(t, y, \dot{y}) = 0. \quad (1.3)$$

#### Exemple 1.4.1

Equation de premier ordre

$$\dot{y} = \cos(y - t)$$

### Equation différentielle de second ordre

Une équation différentielle du second ordre est de la forme:

$$F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}) = 0. \quad (1.4)$$

#### Exemple 1.4.2

*Equation de second ordre*

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 0.$$

### 1.4.2 Forme normale d'une équation différentielle

On appelle équation différentielle normale toute équation de la forme

$$\dot{y} = f(t, y).$$

### 1.4.3 Equation linéaire du premier ordre

#### Définition 1.4.7

*On appelle équation linéaire du premier ordre toute équation différentielle linéaire par rapport à la fonction inconnue et sa dérivée. Autrement dit, les fonctions  $y(t)$  et  $\dot{y}(t)$  sont du premier degré.*

$$\dot{y} + a(t)y = b(t). \quad (1.5)$$

*où  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des fonctions continues de la variable indépendante  $t$  ou des constantes connues.*

#### Exemple 1.4.3

$$\dot{y} + y \tan t = \frac{1}{\cos t}.$$

## 1.5 Le problème de Cauchy

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . On note  $\|\cdot\|$  une norme quelconque de  $\mathbb{R}^m$ .

**Définition 1.5.8**

On considère un point  $(t_0, y_0) \in U$ , le problème de Cauchy correspondant à  $\dot{y} = f(t, y)$ ; où  $(t, y) \in U$  est la recherche des solutions  $y$  de cette équation telles que  $y(t_0) = y_0$ .

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

**Définition 1.5.9 (Solution de pb de Cauchy)**

Une solution du problème (1.6) sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ , avec la condition initiale  $(t_0, y_0) \in U$  et  $t_0 \in I$  est une fonction dérivable  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que

- i. Pour tout  $t \in I$ ,  $(t, y(t)) \in U$ ,
- ii. Pour tout  $t \in I$ ,  $\dot{y} = f(t, y(t))$ ,
- iii.  $y(t_0) = y_0$ .

**Théorème 1.5.3**

Supposons  $f$  une fonction continue sur un ouvert  $U$  et  $(t, y)$  un point fixe de  $U$ , et  $y$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $t_0 \in I$ . Alors  $y$  est une solution de (1.6) de sur  $I$  si et seulement si

1. Pour tout  $t \in I$ ,  $(t, y(t)) \in U$ ,
2.  $y$  est continue sur  $I$ .

**Définition 1.5.10 (Fonction localement lipschitzienne)**

Soient  $I$  un intervalle,  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Soient  $(t_0, y_0) \in I \times D$ . Soit  $J \subset D$  un voisinage du point  $y_0$ . On dit que  $f$  est lipschitzienne par rapport à la variable  $y$  dans le voisinage  $J$  s'il existe une constante positive  $L$  et il existe un voisinage  $U \subset I$  du point  $t_0$  tels que

$$\|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\| \leq L \|y_1(t) - y_2(t)\|.$$

pour  $y_1(t), y_2(t) \in J, t \in U$ .

**Théorème 1.5.4 (Cauchy - Lipschitz)**

Soient  $I$  un intervalle,  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Soient  $(t_0, y_0) \in I \times D$ . Si  $f$  est continue et lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable dans un voisinage du point  $y_0$ , alors le problème de Cauchy admet une unique solution  $y$  définie dans un petit voisinage du point  $t_0$ . De plus la solution est de classe  $C^1$  dans ce voisinage.

# Chapitre 2

## Eléments de Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord deux fonctions importantes dans la théorie du calcul fractionnaire. Puis, on définit l'intégrale fractionnaire et la dérivée fractionnaire et leurs propriétés.

### 2.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les définitions et quelques propriétés de la fonction Gamma d'Euler et la fonction Bêta qui liée a cette fonction.

#### 2.1.1 Fonction Gamma d'Euler

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge la fonction factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

##### Définition 2.1.1

Soit  $x \in \mathbb{R}_*^+$ , la fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale d'Euler de second espèce

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) t^{x-1} dt.$$

avec  $t^{x-1} = \exp[(x-1) \ln t]$ .

Cette intégrale est convergente pour tous les réels positifs.

**Vérification.**

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt, \\ &= \int_0^1 t^{x-1} \exp(-t) dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt,\end{aligned}$$

On applique le théorème de la convergence dominée

Si  $t \in [0, 1]$

Lorsque  $t$  tend vers  $0^+$

$$\varphi(t) = t^{x-1} \exp(-t) \leq t^{x-1},$$

$\int_0^1 \varphi(t) dt$  a un sens si  $x > 0$ .

Si  $t \in [1, +\infty[$

Lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$

$$\varphi(t) \leq \frac{1}{t^2},$$

Alors  $\int_0^1 \varphi(t) dt$  est convergente pour tout  $x$  réel.

Donc la fonction Gamma est convergente pour tous les réels positifs.

**Exemple 2.1.1** Calculons  $\Gamma(1)$  et  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) dt = 1.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \exp(-t) dt,$$

Posons  $t = x^2$ ;  $dt = 2t^{\frac{1}{2}} dx$ . Donc

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx,$$

Pour calculer cette intégrale posons

$$A = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx.$$

Prenons

$$\begin{aligned}A^2 &= \int_0^{+\infty} \exp(-y^2) dy \int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx, \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp-(x^2 + y^2) dx dy.\end{aligned}$$

Le calcul est plus simple à réaliser qu'on effectue les coordonnées polaires

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} r \exp(-r^2) dr d\theta, \\ &= \frac{\pi}{4}, \\ A &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

Alors

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

**Lemme 2.1.1** La fonction Gamma est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , (resp. holomorphe sur le demi plan  $x \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(x) > 0$ )  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} \exp(-t) dx.$$

**Proposition 2.1.1** Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $t > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , on a

1.  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .
2.  $\Gamma(0) = \infty$ .
3.  $\Gamma(n+1) = (n)!$ .
4.  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ .

**Preuve.** 1. Représentons  $\Gamma(x+1)$  par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x \exp(-t) dt, \\ &= [-t^x \exp(-t)]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt, \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x). \end{aligned}$$

D'où la relation dite de récurrence.

2. De (1) on a

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x) &= \infty. \end{aligned}$$

3. Il suffit d'appliquer (1) pour  $x = n$ .

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n \exp(-t) dt,$$

intégrons par partie  $n$  fois. on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n(n-1)(n-2)\dots 1, \\ \Gamma(n+1) &= n!. \end{aligned} \tag{2.1}$$

4. On va démontrer la formule  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ , par récurrence pour  $n \in \mathbb{N}$ .

\* Pour  $n = 0$ , on a  $\Gamma\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

\* Supposons que la formule est vérifiée pour  $(n-1)$  et considérons  $n$ . C'est à dire que  $\Gamma\left((n-1) + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}$ , est vérifié. Alors

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right), \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}, \\ &= \left(\frac{2n-1}{2}\right) \frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}, \\ &= \frac{2n}{2n} \frac{(2n-1)}{2} \frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}, \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}. \end{aligned}$$

Donc la formule est vérifiée pour  $n$ . ■

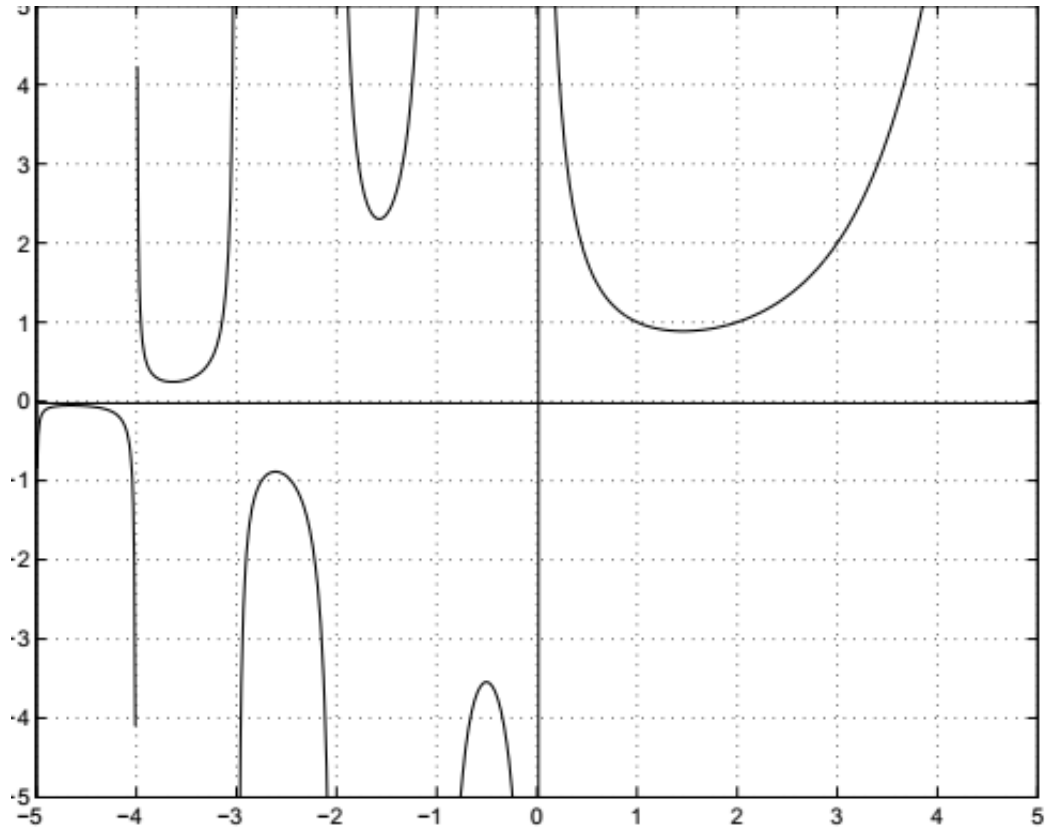
**Corollaire 2.1.1** *La détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatifs non entiers par la formule*

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}, \quad 0 \leq x+n \leq 1.$$

**Exemple 2.1.2** *Calculons  $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$  dans ce cas  $n = 1$ ,*

$$\begin{aligned} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}, \\ \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= -2\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

• Le graphe de la fonction Gamma



### 2.1.2 Fonction Bêta

**Définition 2.1.2** La fonction Bêta est définie par l'intégrale d'Euler de premier espèce

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1}, \quad \forall p, q > 0.$$

**Théorème 2.1.1** La fonction Bêta est raccordée avec la fonction Gamma par la relation suivante

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \forall p, q > 0. \quad (2.2)$$

**Preuve.** Soit  $D = [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$ ,

On a

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} \exp(-x) x^{p-1} dx \int_0^{+\infty} \exp(-y) y^{q-1} dy, \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp-(x+y) x^{p-1} y^{q-1} dx dy; \end{aligned}$$

On pose  $y = u - x$ ;  $dy = du$

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} \int_0^u \exp(-u) x^{p-1} (u-x)^{q-1} dx du, \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-u) \int_0^u x^{p-1} (u-x)^{q-1} dx du;\end{aligned}$$

On pose  $x = tu$ ;  $dx = u dt$

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} \exp(-u) \int_0^1 t^{p-1} u^{p-1} (1-t)^{q-1} u^q dt du; \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-u) u^{p+q-1} du \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt; \\ \Gamma(p)\Gamma(q) &= \Gamma(p+q) B(p, q).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

■

**Exemple 2.1.3** Calculons  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned}B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}, \\ &= \pi.\end{aligned}$$

## Propriétés

1.  $B(p, q) = B(q, p)$ .
2. On peut prendre aussi la forme d'intégrale

$$B(p, q) = 2 \int_0^1 (\sin \theta)^{2p-1} (\cos \theta)^{2q-1} d\theta.$$

par le changement de variable  $t = \sin^2 \theta$ .

## 2.2 Intégrale et Dérivée Fractionnaire

Cette section contient les définitions et quelques propriétés des intégrales et dérivées fractionnaires du type de Riemann-Liouville.

### 2.2.1 Intégrale Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$ . On considère l'intégrale

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

La primitive seconde de  $f$  définit comme suite

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \left( \int_a^u f(t) dt \right) du,$$

Permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$\begin{aligned} I_a^2 f(x) &= \int_a^x \left( \int_t^x du \right) f(t) dt, \\ I_a^2 f(x) &= \int_a^x (x-t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Le  $n^{\text{ième}}$  itéré de l'opérateur  $I$  peut s'écrire

$$I_a^{(n)} f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n, = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt.$$

Pour tout entier  $n$ .

Depuis (2.1)

$$I_a^{(n)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (2.3)$$

Cette formule (2.3) a un sens même quand  $n$  prenant une valeur non-entière, on définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

**Définition 2.2.3** Soit  $f \in C([a, b])$ , l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction  $f$  d'ordre  $\alpha > 0$  est définie par

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha \notin \mathbb{N}. \quad (2.4)$$

**Exemple 2.2.4** *Considérons la fonction  $f(x) = (x - a)^\beta$ , on calcule l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville*

$$I_a^{(\alpha)} (x - a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} (t - a)^\beta dt,$$

*Pour évaluer cette intégrale on pose le changement  $t = a + (x - a)z$ , alors  $dt = (x - a) dz$ , d'où*

$$\begin{aligned} I_a^{(\alpha)} (x - a)^\beta &= \frac{(x - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 z^\beta (1 - z)^{\alpha-1} dz, \\ &= \frac{(x - a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta + 1, \alpha), \end{aligned}$$

*Après l'utilisation de la relation (2.2) on a*

$$I_a^{(\alpha)} (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} (x - a)^{\alpha+\beta}.$$

**Proposition 2.2.2 (Loi de composition)** *Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels strictement positifs et  $f$  une fonction intégrable, on a*

$$I^\alpha (I^\beta f(x)) = I^\beta (I^\alpha f(x)) = I^{\alpha+\beta} f(x).$$

**Preuve.** La preuve découle directement de la définition

$$\begin{aligned} I^\alpha (I^\beta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - y)^{\alpha-1} I^\beta f(y) dy, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^x (x - y)^{\alpha-1} \int_a^y (y - t)^{\beta-1} f(t) dt dy, \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini on a

$$I^\alpha (I^\beta f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^x f(t) dt \int_t^x (x - y)^{\alpha-1} (y - t)^{\beta-1} dy,$$

Par le changement de variable

$$y = t + (x - t)\tau, \quad 0 \leq \tau \leq 1.$$

Alors

$$dy = (x - t) d\tau.$$

on obtient

$$\begin{aligned}
 I^\alpha (I^\beta f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau, \\
 &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt, \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t) dt, \\
 I^\alpha (I^\beta f(x)) &= I^{\alpha+\beta} f(x).
 \end{aligned}$$

D'où le resultat. ■

**Lemme 2.2.2** *L'opérateur d'intégrale fractionnaire  $I_a^\alpha$  avec  $\alpha > 0$  est borné dans  $L^p([a, b])$   $0 \leq p \leq +\infty$*

$$\|I_a^\alpha f\|_p \leq \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f\|_p. \quad (2.5)$$

## 2.2.2 Dérivée Fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires. Dans cette partie on va présenter la dérivée de Riemann-Liouville, qu'est la plus utilisée.

**Définition 2.2.4** *Soit  $f$  une fonction intégrable sur l'intervalle  $[a, b]$ , la dérivée d'ordre  $\alpha$  non entier (avec  $n-1 < \alpha < n$ ;  $n \neq 0$ ) au sens de Riemann-Liouville définit par*

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} [I^{n-\alpha} f(x)],$$

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt. \quad (2.6)$$

où  $n = [\alpha] + 1$ .

En particulier, si  $\alpha = 0$  on aura

$$D_a^0 f(x) = f(x).$$

De plus si  $0 < \alpha < 1$ , alors  $n = 1$ , d'où

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt.$$

**Exemple 2.2.5** On calcul la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f = (x - a)^\beta$

$$D_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{d^n}{dx^n} \left[ I^{n-\alpha} (x - a)^\beta \right],$$

L'intégrale a calculé dans l'exemple précédent

$$D_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n + \beta - \alpha + 1)} (x - a)^{n-\alpha+\beta} \right],$$

Dérive  $n$  fois, on obtient

$$D_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha + 1)} (x - a)^{\beta-\alpha},$$

Comme cas particulier  $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} D_a (x - a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta)} (x - a)^{\beta-1}, \\ D_a (x - a)^\beta &= \beta (x - a)^{\beta-1}. \end{aligned}$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée classique pour  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 2.2.1** La dérivée fractionnaire d'une fonction constante n'est pas nulle ni constante

$$D_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1 - \alpha)} (x - a)^{-\alpha}.$$

**Proposition 2.2.3** L'opérateur de dérivée fractionnaire possède les propriétés suivantes

1. La différentiation est un opérateur linéaire

$$D_a^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda (D_a^\alpha f)(t) + \mu (D_a^\alpha g)(t).$$

2. Soit  $\alpha > 0$  et  $f \in L^p([a, b])$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  alors

$$D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x) \text{ presque par tout dans } [a, b].$$

3. Soient  $0 < \alpha < 1$ ,  $f \in L^1([a, b])$  et  $I^{1-\alpha} f \in AC^1[a, b]$  alors on a

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x) - \frac{(I^{1-\alpha} f)(a)}{\Gamma(\alpha)} (x - a)^{\alpha-1}. \quad (2.7)$$

$AC$  l'espace des fonctions absolument continue sur  $[a, b]$ .

## 2.3 Intégrale d'ordre un demi d'une fonction causale

Dans cette section nous allons voir comment intégrer une demi-fois la fonction causale.

Soit  $u(\bullet)$  une **fonction causale** c'est à dire

$$u(t) = 0 \quad \text{si } t \leq 0.$$

**Définition 2.3.5** On appelle *intégrale d'ordre un demi* de la fonction causale et on note  $(I^{1/2}u)(x)$  définie par

$$(I^{1/2}u)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x u(t) \frac{dt}{\sqrt{x-t}}, \quad t > 0.$$

**Proposition 2.3.4** L'intégrale usuelle d'une fonction causale définit par

$$I^1u(x) = \int_0^x u(t) dt, \quad t > 0.$$

On a alors

$$[I^{1/2}(I^{1/2}u)](x) = \int_0^x u(t) dt.$$

## 2.4 Demi-dérivée de Riemann-Liouville

On a vu au cours du section précédent comment **intégrer une demi-fois** une fonction causale. Si on dérive maintenant cette demi-intégrale, on obtient une **demi-dérivée**, ou une dérivée d'ordre un demi.

**Définition 2.4.6** Soit  $u(\bullet)$  une fonction causale dérivable sur  $]0, +\infty[$ , on définit la demi-dérivée de Riemann-Liouville comme suite

$$D^{1/2}u(x) = \frac{d}{dx} (I^{1/2}u)(x);$$

où

$$D^{1/2}u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left( \int_0^x u(t) \frac{dt}{\sqrt{x-t}} \right), \quad t > 0.$$

# Chapitre 3

## Equations Différentielles fractionnaires

Dans ce chapitre, nous commençons par l'étude du problème de Cauchy pour une équation différentielle fractionnaire du type de Riemann-Liouville. Puis, montrons la liaison entre ce problème et une équation intégrale de Volterra dans l'espace des fonctions sommables. Prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy.

**Définition 3.0.1** Soit  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \notin \mathbb{N}$  et  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors

$$D_a^\alpha y(t) = f(t, y(t)),$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville avec les conditions initiales

$$D^{\alpha-k} y(0) = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

**Lemme 3.0.1** Soit  $0 < \alpha < 1$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}$  et  $f \in L(]a, b])$  alors le problème de Cauchy est définie comme suit

$$D_a^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \tag{3.1}$$

$$D_a^{\alpha-1} y(a) = I^{1-\alpha} y(a) = b_1. \tag{3.2}$$

## 3.1 Equivalence entre le problème de Cauchy et l'équation intégrale du type de Volterra

Dans cette section, nous prouvons que le problème de Cauchy et l'équation intégrale non linéaire de Volterra sont équivalents.

**Définition 3.1.2** La fonction  $y$  est une solution du problème de Cauchy, s'elle satisfait l'équation (3.1) et la condition initiale (3.2) dans  $]a, b]$ .

**Théorème 3.1.1** Soit  $0 < \alpha < 1$ ,  $G$  un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}$ ; soit  $f : ]a, b] \times G \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $f(t, y) \in L(]a, b])$  pour tout  $y \in G$ . Si  $y(t) \in L(]a, b])$ , alors  $y$  satisfait les relations (3.1) et (3.2) si et seulement si  $y$  satisfait l'équation intégrale suivante

$$y(t) = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds, \quad t > a. \quad (3.3)$$

**Preuve.** D'abord nous allons démontrer la nécessité.

Soit  $y \in L(]a, b])$  satisfait les équations (3.1) et (3.2).

Comme  $f(t, y) \in L(]a, b])$  pour tout  $y \in G$  D'après l'équation (3.1) signifie qu'il existe la dérivée fractionnaire  $D_a^\alpha y \in L(]a, b])$ .

on a  $I^{1-\alpha} \in AC([a, b])$

En utilisant (2.7) (avec  $f(x) = y(t)$ ) on obtient

$$I_a^\alpha D_a^\alpha y(t) = y(t) - \frac{(I^{1-\alpha}y)(a)}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha-1},$$

Utilisons l'équation (3.2) alors on a

$$I_a^\alpha D_a^\alpha y(t) = y(t) - \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha-1}. \quad (3.4)$$

Par l'équation (2.5) l'intégrale  $I_a^\alpha f \in L(]a, b])$  existe .

Appliquons l'opérateur  $I_a^\alpha$  sur les deux membres de (3.1) et utilisons (3.4) et (2.4), on obtient (3.3), ce qui montre la nécessité.

Maintenant, nous démontrons la suffisance.

Soit  $y \in L(]a, b])$  satisfait l'équation (3.3). En dérivant (3.3), on obtient

$$(D_a^\alpha y)(t) = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} (D_a^\alpha (t-a)^{\alpha-1})(t) + (D_a^\alpha I_a^\alpha f[s, y(s)])(t). \quad (3.5)$$

Par simplification, on obtient (3.1).

D'autre part on démontre que la condition initiale (3.2) est satisfaite. Pour ceci on applique l'opérateur  $D_a^{\alpha-1}$  a (3.3) on obtient

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha-1}y(t) &= \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} (D_a^{\alpha-1}(t-a)^{\alpha-1})(t) + (D_a^{\alpha-1}I_a^\alpha f[s, y(s)])(t), \\ D_a^{\alpha-1}y(t) &= b_1 + (I_a^1 f[s, y(s)])(x). \end{aligned}$$

$$D_a^{\alpha-1}y(t) = b_1 + \int_a^x f[s, y(s)] ds, \quad (3.6)$$

Par le passage à la limite  $x \rightarrow a$  à la dernière équation, on obtient la condition initiale (3.2) ce qui montre la suffisance. ■

## 3.2 Existence et unicité de la solution pour le problème de Cauchy

Dans cette section, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy dans l'espace  $L^\alpha ]a, b[$  défini par

$$L^\alpha ]a, b[ = \left\{ y \in L ]a, b[, D_a^\alpha y \in L ]a, b[ \right\}. \quad (3.7)$$

D'après le théorème précédent, il suffit de prouver l'existence d'une solution unique  $y \in L ]a, b[$  pour l'équation intégrale non linéaire de Volterra. Nous utilisons le théorème du point fixe de Banach .

**Théorème 3.2.2** Soit  $0 < \alpha < 1$ . Soit  $G$  un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f : ]a, b[ \times G \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telles que

1. Pour tout  $y \in G$ ,  $f(t, y) \in L ]a, b[$ .
2. La fonction  $f$  est vérifiée la condition Lipschitz par rapport  $y$ , c'est-à-dire il existe  $L > 0$  tel que  $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$  pour tout  $t \in ]a, b[$  et pour tout  $y_1, y_2 \in G$ .

Si  $a < t_1 < b$

$$L \frac{(t_1 - a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} < 1, \quad (3.8)$$

alors le problème de cauchy (3.1),(3.2) admet une unique solution  $y$  dans l'espace  $L^\alpha ]a, b[$ .

**Preuve.** D'abord, nous prouvons qu'il existe une solution unique  $y \in L([a, b])$ . D'après le théorème (3.1.1), il est suffisant de montrer l'existence d'une solution unique de l'équation intégrale de Volterra non linéaire. Nous utilisons le théorème du point fixe de Banach pour l'espace  $L([a, t_1])$  avec la norme

$$\|y_1 - y_2\| = \int_a^{t_1} |y_1(t) - y_2(t)| dt.$$

On écrit l'équation intégrale (3.3) sous la forme  $y(t) = (Ty)(t)$  comme suite

$$Ty(t) = y_0(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds,$$

avec

$$y_0(t) = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha-1}. \quad (3.9)$$

On applique le théorème du point fixe de Banach, c'est-à-dire on va démontrer si  $y \in L([a, t_1])$ , alors  $Ty \in L([a, t_1])$  et pour tout  $y_1, y_2 \in L([a, t_1])$  on a l'estimation suivante

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{L([a, t_1])} \leq \omega \|y_1 - y_2\|_{L([a, t_1])}, \quad \omega = L \frac{(t_1-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (3.10)$$

Il suit du (3.9) que  $y_0(t) \in L([a, t_1])$  car

$$\begin{aligned} \|y_0(t)\| &= \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t_1} |(t-a)^{\alpha-1}| dt \\ &= \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^\alpha < +\infty. \end{aligned}$$

Puisque  $f(t, y) \in L([a, b])$ , alors par suite du lemme (2.2.2) avec  $b = t_1$  l'intégrale  $I_a^\alpha f \in L([a, t_1])$ , donc  $Ty \in L([a, t_1])$ .

Maintenant, nous démontrons l'estimation (3.10), on a  $T : L([a, t_1]) \longrightarrow L([a, t_1])$ .

Soit  $y_1, y_2 \in L([a, t_1])$ , alors

$$\begin{aligned} \|Ty_1 - Ty_2\|_{L([a, t_1])} &\leq \|I_a^\alpha |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))|\|_{L([a, t_1])}, \\ &\leq L \|I_a^\alpha |y_1(s) - y_2(s)|\|_{L([a, t_1])}, \\ &\leq L \frac{(t_1-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \|y_1(s) - y_2(s)\|_{L([a, t_1])}. \end{aligned}$$

Ce qui implique l'estimation (3.10), et selon l'équation (3.8) on a  $0 < \omega < 1$ , alors  $T$  est un opérateur contractant dans  $L([a, t_1])$  et d'après le le théorème du point fixe de Banach, il existe une solution unique  $y^*(t) \in L([a, t_1])$  pour l'équation (3.3) dans l'intervalle  $[a, t_1]$ .

### 3.2. Existence et unicité de la solution pour le problème de Cauchy

On considère l'intervalle  $[t_1, t_2]$ , où  $t_2 = t_1 + h_1$ ,  $h_1 > 0$  et  $t_2 < t$ . On peut écrire l'équation (3.3) sous la forme

$$y(t) = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[ \int_a^{t_1} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right]. \quad (3.11)$$

Puisque la fonction  $y(t)$  est uniquement définie sur l'intervalle  $[a, t_1]$ , on peut écrire l'équation (3.11) comme suite

$$y(t) = y_{01}(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds,$$

avec

$$y_{01}(t) = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t_1} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds.$$

On déduit qu'il existe une solution unique  $y^*(t) \in L([t_1, t_2])$  pour l'équation (3.3) dans l'intervalle  $[t_1, t_2]$ . Prend l'intervalle suivant  $[t_2, t_3]$ , où  $t_3 = t_2 + h_2$ ,  $h_2 > 0$  et  $t_3 < b$ , on répète ce processus, on conclut alors qu'il existe une solution unique  $y(t) = y^*(t) \in L([a, b])$  pour l'équation intégrale de Volterra (3.3) et le problème de Cauchy.

Pour compléter la preuve de Théorème, nous devons montrer que la solution unique  $y(t)$  dans  $L([a, b])$  appartient à l'espace  $L^\alpha([a, b])$ , pour cela d'après (3.7) il suffit de démontrer que  $D_a^\alpha y \in L([a, b])$ . Alors on sait d'après le théorème du point fixe que la solution unique  $y(t)$  est obtenue comme une limite d'une suite convergente  $y_m(t) \in L([a, b])$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|y_m - y\|_{L([a, b])} = 0. \quad (3.12)$$

avec le choix de certaine  $y_m$  sur chaque intervalle  $[a, t_1], \dots, [t_{l-1}, b]$ . En effet d'après (3.1) et (3.2) on a

$$\begin{aligned} \|D_a^\alpha y_m - D_a^\alpha y\|_{L([a, b])} &= \|f(t, y_m(t)) - f(t, y(t))\|_{L([a, b])}, \\ &\leq L \|y_m - y\|_{L([a, b])}. \end{aligned}$$

Par (3.12), on a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|D_a^\alpha y_m - D_a^\alpha y\|_{L([a, b])} = 0.$$

Donc  $(D_a^\alpha y)(t) \in L([a, b])$ . Alors le problème de Cauchy admet une solution unique dans l'espace  $L^\alpha([a, b])$ , et la preuve de théorème (3.2.2) est terminée. ■

# Conclusion

Notre but principal dans ce mémoire est d'étudier l'existence et l'unicité pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville avec conditions initiales dans l'espace de Banach.

Ce résultat est obtenu par l'utilisation du théorème de point fixe de Banach.

# Bibliographie

- [1] E. AZOULAY ET J. AVIGNANT, *Mathematiques 3. Analyse*, McGRAW-Hill,1984.
- [2] F. BENSIDHOUM, *Problèmes aux valeurs propres associés à des équations fractionnaires*, Mémoire de Master, Université de Tlemcen, 2011.
- [3] F. DUBOIS. A. C. GALUCIO ET N. POINT, *Introduction à la dérivation fractionnaire*, Conservatoire National des Arts et Metiers, Mathématiques, Paris, France, 2008.
- [4] B. GAGUI, *Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz*, Thèse de Doctorat, Université de M'sila, 2015.
- [5] T. HOUMOR, *Analyse du Chaos dans un système d' équations fractionnaires*, Thèse de Doctorat Université de Costantine1, 2014.
- [6] A. KHIRANI, *Resolution des équations intégrales non linéaires type Volterra*, Mémoire de Mgistère Université de M'sila 2011.
- [7] A. KILBAS. M. SRIVASTNA AND J. TRUJILLO, *Theory and Application of Fractional Differential Equation*, Jan Van Mill, 2006.
- [8] A. LOVERRO, *Fractional Calculus: History, Definitions amd Applications for the Engineers*, university of Notre Dame, 2004.
- [9] H. MEDJEKAL, *Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire implusive de temps infini dans un espace de Banach*, Thèse de Doctorat, Université de Annaba,2015.

- [10] L. P. MENJOUET, *Introduction aux équations différentielles et aux dérivées partielles*, Université de Lyon I, pujo@math.univ-lyon1.fr.
- [11] M.NADIR, *Cours Equations différentielles ordinaires*, Université de M'sila Algérie, 2017.
- [12] F. NEVILLE AND K. DIETHELM, *Analysis of fractional differential equations*, Verlag Berlin Heidelberg 2010.
- [13] I. PODLUBNY, *Fractional differential equations*, Academic Press, 1999.
- [14] J. L. ROUGET, *Calculs de primitives et d'intégrale*, <http://www.matha.france.fr>, 2017.
- [15] F. ZAIDOUR, *La résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire*, Mémoire de Master, Université de Khemis Miliana, 2015.

## ملخص:

في هذه المذكرة قمنا بدراسة مسألة كوشي لمعادلة تفاضلية ذات مشتق كسري لريمان-يوفيل. برهنا نظرية التكافؤ بين هذه المسألة و المعادلة التكاملية الغير خطية لفولتيرا. قمنا باثبات وجود و وحدانية الحل.

## كلمات مفتاحية:

مشتق كسري. تكامل كسري. مسألة كوشي. نظرية النقطة الثابتة في فضاء بناخ. المعادلة التكاملية لفولتيرا.

## Résumé:

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème de Cauchy pour l'équation différentielle avec dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. On a démontré un théorème d'équivalence entre ce problème et une équation intégrale non linéaire de Volterra dans l'espace des fonctions sommable. La base de ce résultat est prouvé l'existence et l'unicité de la solution.

## Mots clés:

Dérivée fractionnaire; Intégrale fractionnaire; Problème de Cauchy; Théorème de point fixe de Banach; Equation intégrale de Volterra.

## Abstract:

In this memory, we studied a Cauchy problem for a differential equation with a fractional Riemann-Liouville derivative. We have demonstrated an equivalence theorem between this problem and a nonlinear integral equation of Volterra in the space of sommable functions. The basis of this result is proved the existence and uniqueness of the solution.

## Keywords:

Fractional derivative; Fractional Integer; Cauchy problem; Banach fixed point theorem; Integral equation of Volterra.

## ملخص:

في هذه المذكرة قمنا بدراسة مسألة كوشي لمعادلة تفاضلية ذات مشتق كسري لريمان-يوفيل. برهنا نظرية التكافؤ بين هذه المسألة و المعادلة التكاملية الغير خطية لفولتيرا. قمنا باثبات وجود و وحدانية الحل.

## كلمات مفتاحية:

مشتق كسري. تكامل كسري. مسألة كوشي. نظرية النقطة الثابتة في فضاء بناخ. المعادلة التكاملية لفولتيرا.

## Résumé:

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème de Cauchy pour l'équation différentielle avec dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. On a démontré un théorème d'équivalence entre ce problème et une équation intégrale non linéaire de Volterra dans l'espace des fonctions sommable. La base de ce résultat est prouvé l'existence et l'unicité de la solution.

## Mots clés:

Dérivée fractionnaire; Intégrale fractionnaire; Problème de Cauchy; Théorème de point fixe de Banach; Equation intégrale de Volterra.

## Abstract:

In this memory, we studied a Cauchy problem for a differential equation with a fractional Riemann-Liouville derivative. We have demonstrated an equivalence theorem between this problem and a nonlinear integral equation of Volterra in the space of sommable functions. The basis of this result is proved the existence and uniqueness of the solution.

## Keywords:

Fractional derivative; Fractional Integer; Cauchy problem; Banach fixed point theorem; Integral equation of Volterra.